Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
S. Assmann
J. Kern
P. Kurth

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1: Training

a) Geben Sie die ersten fünf Terme der Rekursion an.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n}{a_n + \sqrt{a_{n-1}}}.$$

Einfach stur einsetzen:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{1+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{2}{\frac{1}{2}+\sqrt{1}} = \frac{4}{3}, \quad a_4 = \frac{3}{\frac{4}{3}+\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

b) Geben Sie die Rekursionsvorschriften an, die zu den Folgen gehören:

$$1, \quad \frac{1}{1+1}, \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}, \quad \ldots$$

Die Rekursionsvorschrift lautet $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 1/(n+1+a_n)$.

$$1, \quad \frac{1}{2+1}, \quad \frac{1}{3+\frac{1}{2+1}}, \quad \frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{2+1}}}, \quad \ldots$$

Die Rekursionsvorschrift lautet $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 1/(n+a_n)$.

c) Wann heißt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent? Geben Sie die Definition mit Worten an. Formulieren Sie danach die Definition *ausschließlich* mit Symbolen.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für jede positive Fehlerschranke ein Index existiert, ab dem der Abstand der Folgenglieder zu a kleiner ist als die vorgegebene Fehlerschranke. In Symbolen

$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n - a| < \epsilon.$$

d) Konvergiert oder divergiert die Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{3n^2+n}$$

Auf diese tautologische Frage könnten Sie schlicht mit "Ja" antworten (denken Sie an die Wahrheitstabelle der oder Verknüpfung denken und erinnern Sie sich, dass divergent gleichbedeutend mit nicht konvergent ist). Etwas mehr Information enthält aber die Antwort: die Reihe divergiert. Den Nachweis kann man mit dem Minorantenkriterium führen. Beachten Sie dabei, dass n nie kleiner als 1 und die harmonische Reihe divergent ist.

$$\frac{5n}{3n^2+n} = \frac{5}{3n+1} \geq \frac{5}{3n+n} \geq \frac{5}{4}\frac{1}{n}$$

Aufgabe 2: Vektorräume

Überlegen Sie, ob in den folgenden Fällen V ein Vektorraum über K ist (wobei die skalare Multiplikation jeweils durch komponentenweise Multiplikation definiert ist). Ist Ihre Antwort "Ja", so geben Sie auch die Dimension an.

1. $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{Q}^n$: Nein. Multipliziert man den Vektor $(1, \ldots, 1)^T$ komponentenweise mit $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, so ist das Ergebnis $(\sqrt{2}, \ldots, \sqrt{2})$ *kein* Element von $\mathbb{Q}^n$.

2. $K = \mathbb{Q}$ und $V = \mathbb{C}^n$: Ja, alle Axiome gelten. Es gibt allerdings kein endliches Erzeugendensystem, da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist und somit aus endlich vielen Vektoren nur abzählbar viele Vektoren erzeugt werden können. Es gibt daher Elemente der *überabzählbaren* (d.h. nicht abzählbaren) Menge $\mathbb{C}^n$, die mit einem endlichen Erzeugendensyszem nicht dargestellt werden können. Die Dimension ist somit ∞.

3. $K = \mathbb{C}$ und $V = \mathbb{R}^n$: Nein. Der Vektor $i \cdot (1, \ldots, 1)^T = (i, \ldots, i)^T$ ist kein Element von $\mathbb{R}^n$.

4. $K = \mathbb{Z}$ und $V = \mathbb{Q}^n$: Nein. Die Menge $\mathbb{Z}$ ist kein Körper, da $2 \in \mathbb{Z}$ kein inverses Element bezüglich der Multiplikation besitzt.

5. $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{C}^n$: Ja, alle Axiome sind erfüllt. Die Dimension ist $2n$, da die Basis

$$(1, 0, \ldots, 0)^T, (0, 1, 0, \ldots, 0)^T, (0, \ldots, 0, 1)^T, (i, 0, \ldots, 0)^T, (0, i, 0, \ldots, 0)^T, (0, \ldots, 0, i)^T$$

aus $2n$ Vektoren besteht.

Aufgabe 3: Erzeugendensystem, Unabhängigkeit, Basis

a) Bilden folgende Mengen Erzeugendensysteme im $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$? Versuchen Sie dazu jeweils einen allgemeinen Vektor $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ durch Linearkombination der Vektoren zu *erzeugen*. Gibt es unterschiedliche Möglichkeiten der Darstellung?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

Bei der Frage "Erzeugendensystem ja oder nein" geht es prinzipiell um die Frage, ob gewisse lineare Gleichungssysteme stets lösbar sind. Im ersten Fall werden Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gesucht, so dass für beliebige Werte x_1, x_2 das System

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

stets lösbar sind. Sie können also versuchen, das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & x_2 \end{array}\right)$$

zu lösen. Ist dies nicht für jede Wahl von x_1, x_2 möglich, so liegt kein Erzeugendensystem vor. Gibt es für jede Wahl von x_1, x_2 genau eine Lösung $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, so liegt ein spezielles Erzeugendensystem - eine Basis - vor. Gibt es mehrere Lösungen, so liegt ein Erzeugendensystem aber keine Basis vor.

In unserem Fall kann man aber auf die Lösung mit dem Gauß-Algorithmus verzichten. Wenn Sie die Vektoren scharf ansehen, so erkennen Sie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + x_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - (x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h. $\lambda_1 = -(x_1 + x_2), \lambda_2 = x_1, \lambda_3 = x_2$. Wir haben es also mit einem Erzeugendensystem zu tun. Es gibt allerdings noch andere Darstellungsmöglichkeiten, z.B.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_2 + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - (x_1 + x_2 + 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1 = -(x_1 + x_2 + 3), \lambda_2 = x_1 + 1, \lambda_3 = x_2 + 1$, d.h. das Erzeugendensystem ist keine Basis.

Im zweiten Fall kann man prinzipiell wieder den Gauß-Algorithmus benutzen. Man sieht aber schnell, dass die Kombinationen

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

immer von der Form $\binom{c}{c}$ ist, so dass der Vektor $\binom{1}{0}$ zum Beispiel nicht darstellbar ist. Es handelt sich hier also nicht um ein Erzeugendensystem.

b) Sind die Vektoren $\binom{1}{-1}$, $\binom{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ linear unabhängig im $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$. Wie ist es im $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{Q}$?

Sie sind nicht unabhängig im $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$, da wir durch eine nicht-langweilige Linearkombination den Nullvektor erzeugen können

$$\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine entsprechende Kombination funktioniert nicht im $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{Q}$, da dort $\sqrt{2}$ kein zulässiger Skalar ist. Die beiden Vektoren sind dort linear unabhängig.

c) Bilden die Lösungen $\binom{x_1}{x_2}$ der Gleichung $3x_1 + 4x_2 = 1$ einen Unterraum von R^2?

Nein, da der Nullvektor in jedem Unterraum enthalten ist, aber nicht die Gleichung löst.

d) Geben Sie eine Basis für den Lösungsraum der Gleichung $5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ an? Welche Dimension hat der Raum.

Wir müssen möglichst viele linear unabhängige Lösungen des Gleichungssystems bestimmen, z.B. $(-1, 0, 5)^T$ und $(0, 1, 2)^T$. Drei linear unabhängige Lösungen kann es nicht geben, da die Gleichung dann für alle Vektoren in $\mathbb{R}^3$ erfüllt wäre. Dies ist aber nicht der Fall, da z.B. $(1, 1, 1)^T$ keine Lösung ist. Die Dimension des Lösungsraums ist also 2.

<u>Aufgabe 4:</u> Körperwelten

Gegeben sei eine Menge mit zwei Elementen $M = \{A, \Omega\}$. Geben Sie alle möglichen zweistelligen Verknüpfungen auf M durch ihre Verknüpfungstabellen an. Mit welchen dieser Verknüpfungen kann man M zu einem Körper machen?

Wie bei den Wahrheitstabellen stellen wir Verknüpfungstafeln auf. Insgesamt gibt es $2^4 = 16$ mögliche Verknüpfungen, die wir mit $\star_1, \ldots, \star_{16}$ bezeichnen.

x	y	$\star_1$	$\star_2$	$\star_3$	$\star_4$	$\star_5$	$\star_6$	$\star_7$	$\star_8$	$\star_9$	$\star_{10}$	$\star_{11}$	$\star_{12}$	$\star_{13}$	$\star_{14}$	$\star_{15}$	$\star_{16}$
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	Ω	Ω	Ω	Ω	Ω	Ω	Ω	Ω
A	Ω	A	A	A	A	Ω	Ω	Ω	Ω	A	A	A	A	Ω	Ω	Ω	Ω
Ω	A	A	A	Ω	Ω	A	A	Ω	Ω	A	A	Ω	Ω	A	A	Ω	Ω
Ω	Ω	A	Ω	A	Ω	A	Ω	A	Ω	A	Ω	A	Ω	A	Ω	A	Ω

Die beiden Verknüpfungen im Körper müssen kommutativ sein, d.h. $x \star y = y \star x$ muss gelten. Damit scheiden alle Verknüpfungen aus, die in der zweiten und dritten Spalte verschiedene Werte liefern, d.h. $\star_3, \star_4, \star_5, \star_6, \star_{11}, \star_{12}, \star_{13}, \star_{14}$ sind aus dem Rennen. Die Assoziativität schließt die Verknüpfung $\star_{15}$ aus, denn $(A \star_{15} \Omega) \star_{15} \Omega = \Omega \star_{15} \Omega = A$ aber $A \star_{15} (\Omega \star_{15} \Omega) = A \star_{15} A = \Omega$. Aus dem gleichen Grund scheidet $\star_9$ aus. In einem Körper muss es ein neutrales Element der Addition (0) geben und ein davon verschiedenes Element der Multiplikation (1). Es gibt also zwei Möglichkeiten: $A = 0$ und $\Omega = 1$ oder $A = 1$ und $\Omega = 0$. Betrachten wir die erste Möglichkeit. Dann muss für die Addition $\star_a$ gelten: $A \star_a \Omega = \Omega$ und $A \star_a A = A$ (neutrales Element). Es kommen also nur $\star_7$ und $\star_8$ in Frage. Da zu Ω aber ein Element $(-\Omega)$ mit $\Omega \star_a (-\Omega) = A$ existieren muss, scheidet $\star_8$ aus, da dort alle Verknüpfungen mit Ω auf Ω führen. Im Fall $A = 0$ ist also genau $\star_7$ eine zulässige Addition. Für die Multiplikation $\star_m$ kommt wegen der Bedingungen $A \star_m A = A$, $A \star_m \Omega = A$ und $\Omega \star_m \Omega = \Omega$ genau $\star_2$ in Frage. Das Distributivitätsaxiom muss man natürlich noch nachprüfen - es gilt aber. Unsere erste Körperversion ist also

$$A = 0, \qquad \star_7 = +, \qquad \Omega = 1, \qquad \star_2 = \cdot$$

und mit ähnlicher Argumentation folgt im zweiten Fall

$$\Omega = 0, \qquad \star_{10} = +, \qquad A = 1, \qquad \star_8 = \cdot$$