Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
S. Assmann
J. Kern
P. Kurth

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1: Mechanisches Arbeiten - ein Experiment

Die Findung mathematischer Konzepte und ihre Anwendung zur Beantwortung praxisrelevanter Fragen verlangt Kreativität. Das formale Arbeiten mit gegebenen Konzepten (Definitionen, Sätzen) ist dagegen zum großen Teil ein mechanischer Vorgang.
Wenn eine definierte Eigenschaft nachzuweisen ist, so muss *genau* die Bedingung der Definition *sorgfältig* nachgeprüft werden - wie eine Checkliste! Wenn ein Objekt eine definierte Eigenschaft hat, dann dürfen genau die Zusammenhänge *benutzt* werden, die in der Definition angegeben sind - wie bei einer Gebrauchsanleitung!
Um Ihnen dieses typische Vorgehen zu verdeutlichen betrachten wir die (sinnlose) Theorie der **dummbrumm** und der **brummdumm** Zahlen. Wegen der Sinnlosigkeit können Sie sich ausschließlich auf das mechanische Vorgehen konzentrieren, ohne irgendwelche Inhalte verstehen zu müsse n. Die Namen der Eigenschaften sind bewusst verwirrend gewählt, um Sie zu zwingen, jeweils genau in den Definitionen nachzusehen, wenn Sie ein Konzept benutzen bzw. nachweisen wollen. Die Aufgaben sind inhaltlich einfach – die Schwierigkeit liegt im konsequenten logischen Vorgehen.
Das Vorgehen, das mit dieser Aufgabe trainiert werden soll, ist *typisch* und *wesentlich* in der Mathematik! Wenn Sie Schwierigkeiten bei der Bearbeitung haben, versuchen Sie deshalb auf jeden Fall herauszufinden (und zu notieren), worin diese Schwierigkeiten genau bestehen.

Definition 1: Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt **dummbrumm**, falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $(x-3)/4 = m$. Die Zahl heißt **brummdumm**, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x = 2n - 5$.

a) Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn x dummbrumm ist, dann ist x brummdumm.

Nehmen wir an, x ist dummbrumm. Mit Definition 1 gibt es dann ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $(x-3)/4 = m$ ist. Also wissen wir über x, dass $x = 4m + 3$ ist für ein $m \in \mathbb{N}$. Das ist zunächst die Übersetzung des Begriffs dummbrumm. Schauen wir nun, wo wir hinmüssen: wir sollen zeigen, dass x brummdumm ist, also stur nach Definition, dass x von der Form $2n - 5$ ist, mit einem $n \in \mathbb{N}$. Kann das sein, d.h. können wir ein passendes n in unserem Fall finden? Damit es funktioniert, muss offensichtlich $2n-5 = 4m+3$ gelten, d.h. $2n = 4m+8$ also $n = 2m+4$. Zum Aufschreiben gehen wir andersherum vor:

$$\frac{x-3}{4} = m \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; x = 4m+3 = 2(2m+4) - 5,\; m \in \mathbb{N} \;\Rightarrow x = 2n-5,\; \text{mit } n = 2m+4 \in \mathbb{N}$$

In Worten: wenn x dummbrumm ist, dann ist x brummdumm.

b) Gilt auch die Umkehrung des Satzes? **Nein**

Jetzt wird man versuchen, genauso zu argumentieren, aber in umgekehrter Richtung. Sei x brummdumm, d.h. $x = 2n - 5$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\frac{x-3}{4} = \frac{(2n-5)-3}{4} = \frac{2n-8}{4} = \frac{n}{2} - 2$$

Wir sehen, dass das Ergebnis keine natürliche Zahl sein *muss*, etwa wenn $n = 1$ ist. Wir schreiben also auf: $x = 2\cdot 1 - 5 = -3$ ist dummbrumm, aber nicht brummdumm, da $(x-3)/4 = -3/2 \notin \mathbb{N}$. Durch dieses Gegenbeispiel sehen wir, dass die Umkehrung des Satzes nicht gilt.

Merken Sie, wie sie beim Beweisen immer wieder auf die Definition schauen müssen, um nachzusehen, was dummbrumm und was brummdumm war? Genauso muss man bei Begriffen wie Beschränktheit, Konvergenz, Cauchyfolge, Monotonie, Körper, Vektorraum, lineare Unabhängigkeit, etc. immer wieder auf die Definitionen schauen, wenn man damit arbeitet. Die Definitionen enthalten stets genaue Handlungsanweisungen bzw. Beschreibungen, wie der definierte Begriff zu verstehen ist.

Definition 2: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **schnickschnack**, falls $f(x)$ dummbrumm ist für alle x, die brummdumm sind. Die Funktion heißt **schnackschnick**, falls $f(x)$ brummdumm ist für alle x, die dummbrumm sind.

c) Zeigen Sie mit (a), dass f schnackschnick ist, wenn f schnickschnack ist.

Mit Definition 2 schrauben wir uns auf einen höheren Sinnlosigkeitslevel, da wir aufbauend auf den Begriffen der Definition 1 weitere Begriffe einführen. Ob sinnvoll oder sinnlos - der Umgang mit solchen Konstrukten verläuft rein schematisch, wie wir jetzt sehen:

Sei f schnickschnack. Um zu zeigen, dass f dann auch schnackschnick ist, müssen wir zeigen (siehe Definition 2), dass $f(x)$ brummdumm ist, falls x dummbrumm ist. Sei x also dummbrumm. Nach Satz (a) ist dann x auch brummdumm. Da f schnickschnack ist, folgt mit Definition 2, dass $f(x)$ dummbrumm ist. Erneute Anwendung von Satz (a) zeigt, dass $f(x)$ brummdumm ist. Also ist f schnackschnick nach Definition 2.

d) Benutzen Sie das Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$ um zu zeigen, dass die Umkehrung von Satz (c) nicht richtig ist.

Wir überprüfen zunächst, ob f schnickschnack ist. Nach Definition 2 müssen wir dazu untersuchen, was f aus brummdumm Zahlen macht. Sei x also brummdumm, d.h. von der Form $x = 2n - 5$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$f(x) = f(2n - 5) = 2(2n - 5) + 5 = 4n - 5.$$

Ist dieser Wert immer dummbrumm? Wir rechnen nach

$$\frac{f(x) - 3}{4} = \frac{(4n - 5) - 3}{4} = \frac{4n - 8}{4} = n - 2$$

und sehen schnell, dass im Fall $n \in \{1, 2\}$, das Ergebnis keine natürliche Zahl ist. Damit können wir zusammenfassen: die Zahl $-3 = 2 \cdot 1 - 5$ ist brummdumm, aber $f(-3) = -1$ ist nicht dummbrumm, also ist f **nicht schnickschnack**.

Ist f vielleicht schnackschnick? Dazu müssen wir in Definition 2 nachschauen, was f aus dummbrumm Zahlen macht. Sei x also jetzt dummbrumm, d.h. von der Form $x = 4m + 3$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$f(x) = f(3m + 4) = 2(3m + 4) + 5 = 6m + 13$$

und wir müssen nachrechnen, ob solche Werte brummdumm sind, also von der Form $2n - 5$. Durch Gleichsetzen ergibt sich

$$6m + 13 = 2n - 5 \quad \Leftrightarrow \quad n = 3m + 9$$

Da $3m + 9$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl ist, stellen wir also fest, dass $f(x)$ brummdumm ist, falls x dummbrumm ist. Damit ist f nach Definition 2 **schnackschnick**. Insgesamt gibt es also Funktionen, die schnackschnick aber nicht schnickschnack sind, so dass die Umkehrung von (c) falsch ist.

Definition 3: Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ heißt **pingpong**, wenn für jede schnackschnick Funktion f das Bild $T(f)$ auch schnackschnick ist. Die Funktion T heißt **pongping**, falls das Bild von schnickschnack Funktionen schnickschnack ist.

e) Unteruchen Sie, ob die Funktion $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $T(f) = 2f + 1$ pingpong oder pongping ist.

Mit dieser nächsten Stufe der Sinnlosigkeit soll versucht werden, Ihnen Angst zu machen! Aber Sie lassen sich nicht verwirren, geben Ihnen die Definitionen doch einen sicheren Halt. Was immer passiert ... in den Definitionen steht genau, was Sache ist!

Wir verfolgen die gleiche Strategie wie bisher und überprüfen zunächst, ob T pingpong ist. Sei dazu f schnackschnick. Nach Definition 3 ist zu überprüfen, ob auch $T(f)$ schnackschnick ist. Hier beginnt jetzt die rekursive Reise durch unsere bisherigen Definitionen: wann ist $g = T(f)$ eigentlich schnackschnick? Nach Definition 2 genau dann, wenn jede dummbrumm Zahl x auf eine brummdumm Zahl $y = g(x)$ abgebildet wird. Wann ist eine Zahl dummbrumm bzw. brummdumm? Das wiederum beantwortet Definition 1. Beachten Sie, dass das zusätzliche Einführen von Namen sehr hilfreich sein kann. Wenn Sie den Namen g für $T(f)$ nicht einführen, dann müssen Sie mit Ausdrücken wie $(T(f))(x)$ arbeiten, wobei man bei den vielen Klammern auch schnell mal den Überblick verliert.

Aber zurück zum Thema: wir müssen also untersuchen, ob $g = T(f) = 2f+1$ schnackschnick ist, wenn f schnackschnick ist. Sei dazu x dummbrumm. Wenn wir zeigen können, dass dann $y = g(x) = 2f(x)+1$ brummdumm ist, dann wäre g schnackschnick. Wir wissen, da f schnackschnick ist, dass $w = f(x)$ brummdumm also von der Form $w = 2n - 5$ ist. Somit gilt

$$y = 2w + 1 = 2(2n - 5) + 1 = 4n - 9.$$

Dieser Wert ist von der Form $2k - 5$, wenn $4n - 9 = 2k - 5$, d.h. für $k = 2n - 2$. Im Fall $n = 1$ ist k aber keine natürliche Zahl, d.h. wir müssten mit einem Gegenbeispiel zeigen können, dass T *nicht* pingpong ist. Wählen wir zum Beispiel f als die konstante Funktion $f(x) = -3$, so ist f schnackschnick, da -3 eine brummdumm Zahl ist. Die Abbildung $g = T(f)$ ist dann auch konstant $g(x) = -5$ aber -5 ist keine brummdumm Zahl, d.h. g ist nicht schnackschnick und damit ist T **nicht pingpong**.

Überprüfen wir nun, ob T pongping ist, d.h. ob $g = T(f)$ schnickschnack ist, wenn f schnickschnack ist. Nehmen wir dazu an, x sei brummdumm. Da f schnickschnack ist, ist $w = f(x)$ dummbrumm, also von der Form $w = 4m+3$. Folglich ist $y = g(x) = 2f(x)+1 = 2w+1 = 8n+7$. Die Funktion g ist nun schnickschnack, wenn y dummbrumm, d.h. von der Form $4k + 3$ ist für ein $k \in \mathbb{N}$. Da $8n + 7 = 4k + 3$ äquivalent ist zu $k = 2n + 1$, liefert $g = T(f)$ garantiert dummbrumm Werte, wenn das Argument brummdumm ist. Also ist g schnickschnack und T damit **pongping**.

f) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung (Verkettung) von zwei pingpong Funktionen wieder pingpong ist.

Diese Aussage hat nun wenig mit den Details von dummbrumm und brummdumm Zahlen zu tun. Seien $S, T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ zwei pingpong Funktionen. Die Verkettung $S \circ T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ ist dann definiert durch $(S \circ T)(f) = S(T(f))$. Um zu zeigen, dass $S \circ T$ pingpong ist, müssen wir wegen Definition 3 nachweisen, dass $S(T(f))$ schnackschnick ist, falls f schnackschnick ist. Da aber T nach Voraussetzung pingpong ist, ist $g = T(f)$ schnackschnick wenn f schnackschnick ist. Da S pingpong ist, ist dann auch $S(g) = S(T(f))$ schnackschnick. Also ist $S \circ T$ pingpong.