Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
S. Assmann
J. Kern
P. Kurth

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1: Nicht 5 gerade sein lassen

Zum Trainieren von klarer und sauberer Argumentation betrachten wir einige elementare Zusammenhänge von geraden und ungeraden Zahlen.

1) Schreiben Sie die Mengen G der geraden natürlichen Zahlen und U der ungeraden natürlichen Zahlen in Mengenschreibweise.

$$G = \{n \in \mathbb{N} | \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k\}, \qquad U = \{n \in \mathbb{N} | \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1\}.$$

2) Beweisen Sie basierend auf Ihrer Mengendefinition: *Eine natürliche Zahl ist genau dann in G, wenn sie die Form $2m$ hat mit einem $m \in \mathbb{N}$.* (Wenn Sie jetzt ratlos sind, was da zu tun ist, beachten Sie, dass es sich um eine Äquivalenz, also um zwei Implikationen handelt. Beachten Sie weiter, dass $\{m \in M | A(m)\}$ definiert ist als Menge aller m aus M, für die $A(m)$ wahr ist. Zum Beweis müssen Sie also hier nur die *Definition* der Mengenschreibweise und die spezielle Form von $A(m)$ benutzen.)

Wenn Sie G so definiert haben wie oben, dann geht der Beweis z.B. so: Sei $n \in G$. Nach Definition der Mengenschreibweise ist dann die Aussage $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k$ wahr, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$. Mit $m = k$ folgt die Behauptung. Ist umgekehrt $n = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist für n die Aussage $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k$ wahr, d.h. $n \in G$.

3) Wir betrachten einen Beweis zu dem Satz: *Die Summe von zwei geraden natürlichen Zahlen ist gerade.* Überprüfen Sie, ob jeder Schritt durch eine *Definition* oder einen *Satz* begründet ist.

Beweis: Seien $n, m \in G$. Dann gilt nach (2), dass es $k, l \in \mathbb{N}$ gibt, mit $n = 2k$ und $m = 2l$. Also folgt $n + m = (2k) + (2l) = 2(k + l) = 2r$ mit $r = k + l$. Da $k, l \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ abgeschlossen ist bezüglich Addition folgt $r \in \mathbb{N}$. Erneute Benutzung von (2) zeigt $n + m \in G$.

Der Beweis ist vollständig bis auf den Hinweis dass die Axiome der reellen Zahlen benutzt wurden, um die kleine Rechnung $n + m = 2r$ durchzuführen (Axiome sind wahre Aussagen und damit Sätze).

4) Beweisen Sie wie in (3) bzw. besser als in (3), falls Hinweise auf Definitionen und Sätze fehlen, dass die Summe von zwei ungeraden natürlichen Zahlen gerade ist.

Die Kopie von (3) verlangt insbesondere die Kopie von (2) für U. Das ist möglich und korrekt. Man kann natürlich auch beide Beweise verknüpfen und zwar so: Seien $m, n \in U$. Nach Definition der Mengenschreibweise gibt es dann $k \in \mathbb{N}$ mit $m = 2k-1$ und $l \in \mathbb{N}$ mit $n = 2l-1$. Für die Summe folgt mit den Axiomen der reellen Zahlen $m+n = (2k-1)+(2l-1) = 2(k+l-1) = 2r$ mit $r = k+l-1$. Da $\mathbb{Z}$ abgeschlossen ist bezüglich Addition und Subtraktion und $k, l, 1 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, gilt sicherlich $r \in \mathbb{Z}$. Wegen $k, l \geq 1$ folgt zusätzlich mit den Axiomen der reellen Zahlen, dass $r \geq 1$, so dass $r \in \mathbb{Z} \cap [1, \infty) = \mathbb{N}$. Die Zahl $n + m$ ist also von der Form $2r$ mit $r \in \mathbb{N}$, so dass die Behauptung mit (2) folgt.

5) Beweisen Sie so sorgfältig wie in (4) verlangt: *Das Quadrat von ungeraden Zahlen ist ungerade.*

Sei $n \in U$, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k - 1$. Mit der zweiten binomischen Formel folgt $n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2r - 1$ mit $r = 2k(k-1) + 1$. Mit der Abgeschlossenheit von $\mathbb{Z}$ bezüglich Addition und Multiplikation ist $r \in \mathbb{Z}$. Außerdem ist $r \geq 1$, also $r \in \mathbb{Z} \cap [1, \infty) = \mathbb{N}$.

Die Behauptung folgt mit (2).

6) Zeigen Sie sorgfältig: *Eine natürliche Zahl die nicht gerade ist, muss ungerade sein.* Formulieren Sie zunächst die Aussage mit Symbolen. Sie wissen natürlich, dass die geraden und ungeraden Zahlen zusammen die natürlichen Zahlen bilden. Können Sie das beweisen und können Sie mit dieser Hilfsaussage die obige Aussage begründen? Tipp: Da sie alle Beweisschritte auf Definitionen oder Sätze zurückführen müssen, sollten Sie irgendwann auch die Definition der natürlichen Zahlen brauchen!

In Symbolen geschrieben lautet die Aussage: $n \in \mathbb{N}\backslash G \Rightarrow n \in U$. Wir zeigen zunächst, dass $M = U \cup G \subset \mathbb{N}$ eine induktive Menge ist. Da $\mathbb{N}$ nach Definition die kleinste induktive Menge ist, folgt dann $\mathbb{N} \subset M \subset \mathbb{N}$, also $M = \mathbb{N}$. Als erstes ist nachzuweisen, dass $1 \in M$. Nun ist $1 = 2 \cdot 1 - 1$, also $1 \in U \subset M$. Weiter ist zu zeigen, dass wenn $n \in M$ dann auch $n + 1 \in M$. Ist $n \in M = U \cup G$, so folgt nach Definition der Vereinigungsmenge, dass $n \in U$ oder $n \in G$. Ist $n \in U$, so ist $n = 2k - 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Also $n + 1 = 2k \in G \subset M$. Ist $n \in G$, so ist $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, also $n + 1 = 2k + 1 = 2(k + 1) - 1 \in U \subset M$. Die Menge M ist also induktiv.
Aufgrund der allgemeinen Aussage über Mengen: $(A \cup B)\backslash B \subset A$ folgt nun $\mathbb{N}\backslash G \subset U$. Ist also $n \in \mathbb{N}\backslash G$ so auch $n \in U$, d.h. die Implikation $n \in \mathbb{N}\backslash G \Rightarrow n \in U$ ist wahr. Die Beziehung $(A \cup B)\backslash B \subset A$ ergibt sich übrigens durch Definition von $\backslash$ und den Wahrheitstabellen der logischen Verknüpfungen. Wenn $x \in (A \cup B)\backslash B$, dann ist $x \in A$ oder $x \in B$ und $x \notin B$. Also muss $x \in A$ sein.

Aufgabe 2: Übersetzung Symbole → Anschauung

1) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Was bedeutet folgende Aussage geometrisch? Geben Sie je ein Beispiel für f an, so dass die Aussage erfüllt bzw. nicht erfüllt ist.

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \cup [f(b), f(a)] : \exists x \in [a, b] : f(x) = y.$$

Die Aussage bedeutet, dass die Funktion f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt. Als Beispiel, wo dies zutrifft, dient jede stetige Funktion, also etwa $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = 1$ für alle $x \in [0, 1]$. Ein Gegenbeispiel muss auf jeden Fall unstetig sein, z.B. $f = H|_{[-1,1]}$, also die Heaviside Funktion eingeschränkt auf $[-1, 1]$. Dann gilt $0 = H(-1) < 1/2 < 1 = H(1)$ aber $y = 1/2$ wird an keiner Stelle als Wert angenommen.

2) Die Menge $\mathcal{F}(A, B)$ enthalte alle Funktionen $f : A \to B$. Zeigen Sie durch ein konkretes Beispiel, dass folgende Aussage wahr ist.

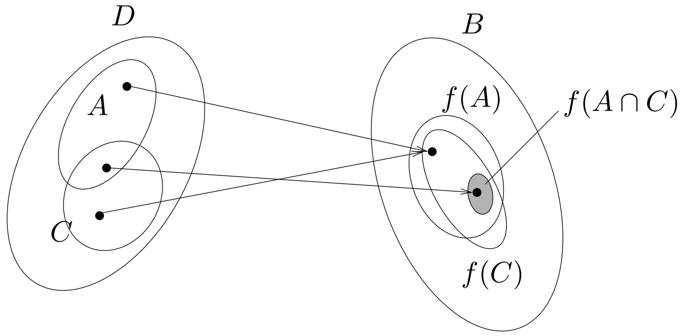
$$\exists f \in \mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R}) : \exists x \in [-1, 1] : \forall \theta \in [0, 1] : f(x) \neq (1 - \theta)f(-1) + \theta f(1).$$

Für das Beispiel ist entscheident, dass die Funktion f Funktionswerte hat, die *nicht* zwischen $f(-1)$ und $f(1)$ liegen. So gilt etwa für $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1-x^2$, dass $f(-1) = f(1) = 0$ und damit für jedes $\theta \in [0, 1]$ $f(0) = 1 \neq 0 = (1 - \theta)f(-1) + \theta f(1)$.

Aufgabe 3: Fingerübung mit Funktionen

1) Sei $f : D \to B$ eine Funktion und $A, C \subset D$. Überlegen Sie sich mit "Eiermengen", die wenige Punkte beinhalten, dass $f(A \cap C) \subset f(A) \cap f(C)$ gilt und beweisen Sie die Aussage danach sorgfältig. Sie *müssen* dabei die Definition der Konstruktion f(Menge) benutzen.

Im allgemeinen Fall ist $f(A \cap C)$ eine echte Teilmenge von $f(A) \cap f(C)$. Dies tritt dann auf, wenn f nicht injektiv ist, wie die folgende Skizze veranschaulicht.



Sei nun $y \in f(A \cap C)$. Nach Definition gibt es dann $x \in A \cap C$ mit $y = f(x)$. Da $x \in A$ gilt außerdem nach Definition, dass $y = f(x) \in f(A)$. Genauso gilt $y \in f(C)$ da $x \in C$. Nach Definition der Schnittmenge ist also $y \in f(A) \cap f(C)$. Also ist jedes Element von $f(A \cap C)$ auch in $f(A) \cap f(C)$ und damit folgt die Behauptung.

2) Geben Sie Beispiele reeller Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und Teilmengen $A, C \subset [0,1]$ an, so dass $f(A \cap C) = f(A) \cap f(C)$, bzw. $f(A \cap C) \neq f(A) \cap f(C)$ gilt.

Ein langweiliges Beispiel für den Fall der Gleichheit ist die Wahl $A = C$, die unabhängig von f funktioniert. Ein Beispiel für die Ungleichheit ist $A = [0, 1/2]$, $C = [1/2, 1]$ und $f(x) = x(1-x)$. Dann ist $f(A \cap C) = \{1/4\}$ aber $f(A) \cap f(C) = [0, 1/4]$.

3) Was ist eigentlich $f(\emptyset)$? Beweis!

Durch Widerspruch zeigen wir $f(\emptyset) = \emptyset$: Nehmen wir an, es gibt ein $y \in f(\emptyset)$. Dann gäbe es nach Definition von $f(\emptyset)$ ein $x \in \emptyset$ mit $f(x) = y$. Das ist aber ein Widerspruch, da es kein Element $x \in \emptyset$ gibt.

4) Geben Sie eine genaue geometrische Bedingung an, mit der Sie anhand des Graphen einer reellen Funktion $f : D \to B$ mit $D, B \subset \mathbb{R}$ überprüfen können, ob die Funktion injektiv, surjektiv, oder bijektiv ist.

Wir betrachten die horizontalen Geraden G_c, die durch die Koordinaten $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = c\}$ für beliebige $c \in B$ definiert sind (also G_c läuft durch $(0, c)$ und ist parallel zur x-Achse). Schneidet sich für jedes $c \in B$ die Gerade G_c *höchstens* einmal mit dem Funktionsgraphen Γ_f, so ist die Funktion *injektiv*. Schneidet sich jede Gerade G_c mit $c \in B$ *mindestens* einmal mit dem Graphen, so ist die Funktion *surjektiv*. Schneiden sich die Geraden G_c mit $c \in B$ *genau* einmal mit dem Graphen, so ist die Funktion *bijektiv*.