Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
S. Assmann
J. Kern
P. Kurth

Mathematik **e**inüben in **G**ruppen**a**rbeit
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1: Gleichheit von Funktionen

Kann es sein, dass zwei Funktionsvorschriften unterschiedlich "aussehen" und trotzdem die gleiche Funktion beschreiben? Hier ist ein Beispiel: Finden Sie eine möglichst große Menge $D \subset \mathbb{R}$, so dass die folgenden Funktionen gleich sind.

$$\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x-1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$$

Zwei Funktionen sind gleich, wenn sie gleiche Definitions- und Wertemengen haben und wenn sie bei gleichen Argumenten gleiche Funktionswerte produzieren. Gleiche Funktionswerte treten bei den Argumenten x auf, wo $3x - 1 = x^2 + 1$ ist, d.h. wenn $x^2 - 3x + 2 = 0$ gilt. Da $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, ist $D = \{1, 2\}$ die größte Menge auf der die Zuordnungsvorschriften die gleichen Werte liefern.

Aufgabe 2: Stetigkeiten

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Welche Aussage charakterisiert Stetigkeit, welche gleichmäßige Stetigkeit? (Bem: "charakterisiert" bedeutet "ist äquivalent zu". Wenn Sie also der Meinung sind, dass eine Aussage weder Stetigkeit noch gleichmäßige Stetigkeit charakterisiert, dann müssen Sie entweder ein konkretes Beispiel mit einer unstetigen Funktion angeben, so dass die Aussage wahr ist, oder ein Beispiel mit einer stetigen Funktion, für das die Aussage falsch ist.)

1. $\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon$
   Wählt man f als Heaviside Funktion und $\epsilon = 2$ so gilt unabhängig von der Lage von x und y, dass $|f(x)-f(y)| \le 1 < \epsilon$ ist. Die Aussage ist also für eine unstetige Funktion wahr und charakterisiert damit *keine* Stetigkeit.

2. $\forall x \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : \forall \epsilon > 0 : \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon$
   Wählt man eine nicht-konstante stetige Funktion (z.B. $f : x \mapsto x$), so kann man zeigen, dass die Aussage falsch, bzw. ihre Negation wahr ist. Die Aussage charakterisiert also *keine* Stetigkeit. Zum Nachweis brauchen wir zunächst die Negation (haben Sie das auch geschafft?)

   $$\exists x \in \mathbb{R} : \forall \delta > 0 : \exists \epsilon > 0 : \exists y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \ge \epsilon$$

   Eine Existenzaussage zeigt man am einfachsten durch eine konkrete Angabe. Sei dazu $x = 0$, $\delta > 0$ beliebig, $\epsilon = \delta/4$ und $y = \delta/2$. Dann gilt $|x - y| < \delta$ und tatsächlich $|f(x) - f(y)| = |x - y| = \delta/2 > \delta/4 = \epsilon$.

3. $\forall \epsilon > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon$
   Auch hier kann man zeigen, dass die Aussage nicht für jede stetige Funktion wahr ist und damit *keine* Stetigkeit charakterisiert. Wir wählen wieder $f : x \mapsto x$ und nehmen $\epsilon = 1$, $x = 0$, $y = 100$. Dann gilt für jedes $\delta > 0$, was $\delta > |x - y| = 100$ erfüllt, dass $|f(x) - f(y)| = |x - y| = 100 > 1 = \epsilon$ ist. Die Negation ist also für eine stetige Funktion wahr.

4. $\forall x \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon$
   Das ist die $\epsilon - \delta$ Definition der Stetigkeit.

5. $\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon$
   Das ist die $\epsilon - \delta$ Definition der gleichmäßigen Stetigkeit.

Aufgabe 3: Matrixdarstellung linearer Abbildungen

Wenn Sie gewisse Klimmzüge in Vektorräumen wie Basiswechsel oder Matrixdarstellung von linearen Abbildungen nicht nachvollziehen können, liegt das vielleicht daran, dass Sie nicht die "richtigen" Beispiele vor Augen haben. Mein Rezept für bessere Beispiele: *Denken Sie an Vektorräume, deren Elemente* keine *Zahlentupel sind, d.h. bei denen sich die Vektoren deutlich von ihren Koordinaten(vektoren) unterscheiden. Diese deutliche Trennung ist sehr wichtig, wenn es um Basisdarstellungen von Vektoren oder linearen Abbildungen sowie um das Verhalten dieser Darstellungen bei Basiswechseln geht.*
Besonders geeignet sind hierzu die Polynomräume: die Vektoren sind Polynome, also Funktionen auf kontinuierlichen Mengen (Intervallen) und daher sicherlich nicht mit Zahlentupeln zu verwechseln. Außerdem werden für wichtige Anwendungen (Interpolationsaufgaben) unterschiedlichste Basen benötigt, zwischen denen immer wieder gewechselt werden muss. Schließlich gibt's viele sinnvolle lineare Abbildungen auf den Polynomen, zu deren Definition keine Basis eingeführt werden muss (koordinatenfreie Definition). Solche Beispiele veranschaulichen den Effekt von Matrixdarstellungen zu linearen Abbildungen. Aber jetzt mal konkreter:

1. Zeigen Sie, dass der Vektorraum $\mathcal{P}_d$ der reellen Polynome vom Grad $\le d$ einen Unterraum des Vektorraums $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller reellen Funktionen auf $\mathbb{R}$ darstellt (Summe und skalare Multiplikation sind wie üblich punktweise definiert, d.h. $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$ für alle $x \in I$ und $\lambda \in \mathbb{R}$).
   Es muss nur die Abgeschlossenheit bezüglich den beiden Operationen gezeigt werden. Da Polynome vom Grad $\le d$ durch die Form $x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$ definiert sind mit $a_i \in \mathbb{R}$, zeigt sich sofort, dass auch Summen und Vielfache wieder von dieser Form sind. Damit ist $\mathcal{P}_d$ ein Unterraum.

2. Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $\mathcal{T}_a : V \to V$ definiert durch $\mathcal{T}_a(f) : x \mapsto f(x - a)$ heißt Translation (wieso?). Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_a$ linear ist und das $\mathcal{T}_a$ den Unterraum $\mathcal{P}_d$ in sich selbst abbildet.
   Der Graph von $x \mapsto f(x - a)$ ist der um a verschobene Graph von f (hat f bei $\bar{x}$ z.B. ein Maximum, so hat $\mathcal{T}_a(f)$ das Maximum bei $\bar{x}+a$, d.h. das Maximum wird um a verschoben). Die Linearität rechnet man leicht nach: für beliebiges x in $\mathbb{R}$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

   $$[\mathcal{T}_a(\alpha f + \beta g)](x) = (\alpha f + \beta g)(x-a) = \alpha f(x-a) + \beta g(x-a) = \alpha\, [\mathcal{T}_a(f)]\,(x) + \beta\, [\mathcal{T}_a(g)]\,(x)$$

   so dass wegen der Definition von Gleichheit von Funktionen gilt $\mathcal{T}_a(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{T}_a(f) + \beta \mathcal{T}_a(g)$. Die Tatsache, dass $\mathcal{T}_a$ den Raum $\mathcal{P}_d$ in sich selbst abbildet ist eine Konsequenz des binomischen Satzes. Für alle Monome $q_n : x \mapsto x^n$ mit $n \le d$ gilt nämlich

   $$[\mathcal{T}_a(q_n)](x) = (x - a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-a)^{n-k} x^k$$

   d.h. $\mathcal{T}_a(q_n)$ ist Element von $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_d$. Da jedes Element von $\mathcal{P}_d$ als Linearkombination von Monomen geschrieben werden kann, folgt die Aussage mit der Linearität von $\mathcal{T}_a$.

3. Sei $y \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $\delta_y : V \to \mathbb{R}$ definiert durch $\delta_y(f) = f(y)$ heißt Punktauswertung in y (wieso?). Zeigen Sie, dass δ_y linear ist.
   Na klar, weil $\delta_y(f)$ der Funktion f ihren Funktionswert in y zuordnet. Linearität folgt mit ähnlicher Rechnung wie in (2).

4. Sei $\sigma > 0$. Die Abbildung $\mathcal{S}_\sigma : V \to V$ definiert durch $\mathcal{S}_\sigma(f) : x \mapsto f(\sigma x)$ heißt ... schlagen Sie was vor! Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}_\sigma$ linear ist und das $\mathcal{S}_\sigma$ den Unterraum $\mathcal{P}_d$ in sich selbst abbildet.
Ein sinnvoller Name wäre Streckung bzw. Skalierung. Die Linearität rechnet man nach wie in den vorherigen Beispielen. Das Polynome wieder Polynome werden zeigt man wie in (2) durch Betrachtung der Monome.

5. Sei $m : x \mapsto x^2 - 2$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathcal{M} : V \to V$ definiert durch punktweise Multiplikation mit dem festen Polynom m, also $\mathcal{M}(f) : x \mapsto m(x)f(x)$, linear ist und $\mathcal{P}_d$ in $\mathcal{P}_{d+2}$ abbildet.
Linearität ergibt sich daraus, dass in jedem Punkt x, der Polynomwert $m(x)$ ausgeklammert werden kann. Da sich der Grad eines Polynoms bei Multiplikation mit m um 2 erhöht, folgt $\mathcal{M}(\mathcal{P}_d) \subset \mathcal{P}_{d+2}$.

6. Geben Sie die Matrixdarstellung von $\delta_1 : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ in der Monom-Basis (q_0, q_1, q_2) mit $q_k : x \mapsto x^k$ an. Wie lautet die Matrixdarstellung bezüglich der Basis (p_0, p_1, p_2) mit $p_k : x \mapsto (x-1)^k$?
Sei $Q = a_0q_0 + a_1q_1 + a_2q_2$ ein beliebiges Polynom in $\mathcal{P}_2$. Dann gilt

$$\delta_1(Q) = Q(1) = a_0q_0(1) + a_1q_1(1) + a_2q_2(1) = a_0 + a_1 + a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Die Matrixdarstellung der Punktauswertung in 1 bezüglich der Basis aus Monomen ist also $(1 \quad 1 \quad 1)$. Genauso gilt für ein Polynom $P = b_0p_0 + b_1p_1 + b_2p_2$

$$\delta_1(P) = b_0p_0(1) + b_1p_1(1) + b_2q_2(1) = b_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Die Matrixdarstellung der Punktauswertung in 1 bezüglich der Basis aus verschobenen Monomen ist also $(1 \quad 0 \quad 0)$. Also: gleiche Abbildung - zwei verschiedene Matrixdarstellungen je nach Wahl der Basis. Das Sie die eine Matrixdarstellung aus der anderen ableiten können, wenn Sie die passende Basiswechselmatrix ermittelt haben, können Sie ja mal ausprobieren.

7. Geben Sie die Matrixdarstellung von $\mathcal{T}_1 : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ in der Monom-Basis (q_0, q_1, q_2) an. Wie lautet die Matrixdarstellung bezüglich der Basis (p_0, p_1, p_2)?
Mit dem gleichen Zugang wie oben betrachten wir $\mathcal{T}_1(Q)$. Dazu müssen wir $\mathcal{T}_1(q_k)$ ausrechnen und das Ergebnis wieder in der gleichen Basis darstellen, d.h.

$$\mathcal{T}_1(q_0) = q_0, \qquad \mathcal{T}_1(q_1) = q_1 - q_0, \qquad \mathcal{T}_1(q_2) = q_2 - 2q_1 + q_0$$

Für $Q = a_0q_0 + a_1q_1 + a_2q_2$ gilt dann mit Linearität

$$\mathcal{T}_1(Q) = a_0q_0 + a_1(q_1 - q_0) + a_2(q_2 - 2q_1 + q_0) = (a_0 - a_1 + a_2)q_0 + (a_1 - 2a_2)q_1 + a_2q_2.$$

Der Übergang von den Argumentkoordinaten $a = (a_0, a_1, a_2)^T$ zu den Bildkoordinaten $y = (a_0 - a_1 + a_2, a_1 - 2a_2, a_2)^T$ ist damit durch die Gleichung $y = T_1a$ gegeben mit der Matrix

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Matrixdarstellung in der Basis (p_0, p_1, p_2) starten wir mit einem beliebigen Polynom $P = b_0p_0 + b_1p_1 + b_2p_2$. Um $\mathcal{T}_1(P)$ zu berechnen, benötigen wir die Darstellung von $\mathcal{T}_1(p_k)$ in der Basis p_k, d.h.

$$\mathcal{T}_1(p_0) = p_0, \qquad \mathcal{T}_1(p_1) = p_1 - p_0, \qquad \mathcal{T}_1(p_2) = (p_1 - p_0)^2 = p_1^2 - 2p_0p_1 + p_0^2 = p_2 - 2p_1 + p_0$$

Also wieder

$$\mathcal{T}_1(P) = b_0p_0 + b_1(p_1 - p_0) + b_2(p_2 - 2p_1 + p_0) = (b_0 - b_1 + b_2)p_0 + (b_1 - 2b_2)p_1 + b_2p_2$$

so dass die Matrixdarstellung in der Basis (p_0, p_1, p_2) wieder durch T_1 gegeben ist. Es kann also auch passieren, dass verschiedene Basen zur gleichen Matrixdarstellung führen.

8. Geben Sie die Matrixdarstellung von $\mathcal{M} : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_3$ an bezüglich der Basis (q_0, q_1) von $\mathcal{P}_1$ und (p_0, p_1, p_2, p_3) von $\mathcal{P}_3$.
Wir starten mit einem Polynom $Q = a_0q_0 + a_1q_1$. Wegen $m = q_2 - 2q_0$

$$\mathcal{M}(Q) = a_0m + a_1mq_1 = a_0(q_2 - 2q_0) + a_1(q_3 - 2q_1)$$

und $q_0 = p_0$, $q_k = (p_1 - p_0)^k$, $p_k = p_1^k$ für $k \geq 1$, ergibt sich

$$\mathcal{M}(Q) = a_0(p_1^2 - 2p_1 + p_0 - 2p_0) + a_1(p_1^3 - 3p_1^2 + 3p_1 - p_0 - 2(p_1 - p_0))$$

also

$$\mathcal{M}(Q) = (a_1 - a_0)p_0 + (a_1 - 2a_0)p_1 + (a_0 - 3a_1)p_2 + a_1p_3.$$

Die Matrix zur linearen Abbildung $\mathcal{M}$ ist daher

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$