Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
S. Assmann
J. Kern
P. Kurth

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1: Verstehen – Zuordnen – Aufschreiben

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Können Sie die folgenden Konzepte den Aussagen in Quantorenschreibweise zuordnen?

1. f ist beschränkt.
2. f hat eine Sprungstelle.
3. f ist nirgends stetig.
4. f konvergiert für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ gegen 0.

Bilden Sie passende Nummernpaare mit

1. $\exists x \in \mathbb{R} : \exists \epsilon > 0 : \exists s \in \{-1, 1\} : \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R}, sx - \delta < sy < sx : |f(x) - f(y)| > \epsilon$
2. $\exists x \in \mathbb{R} : \exists \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| > \epsilon$
3. $\exists x \in \mathbb{R} : \exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon$
4. $\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R}, |y| > \delta : |f(y)| < \epsilon$
5. $\forall x \in \mathbb{R} : \exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| > \epsilon$

Lösung: (1,3), (2,1), (3,5), (4,4)

Präzisieren Sie folgende Aussagen in Quantorenschreibweise.

1. f hat ein Maximum.
   $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(y)$
2. f hat ein lokales Maximum.
   $\exists x \in \mathbb{R} : \exists \epsilon > 0 : \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \epsilon : f(x) \geq f(y)$
3. Der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse.
   $\forall x \geq 0 : f(x) = f(-x)$
4. f ist periodisch.
   $\exists p > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x + p)$
5. f ist linear.
   $\forall x, y, a, b \in \mathbb{R} : f(ax + by) = af(x) + bf(y)$
6. f hat eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel.
   $\exists x \in \mathbb{R} : \forall \delta > 0 : \exists y_+, y_- \in \mathbb{R}, |x - y_\pm| < \delta : f(x) = 0 \wedge f(y_-) < 0 \wedge f(y_+) > 0$

Aufgabe 2: Wenn aus Folgen Folgen folgen ...

Erinnern Sie sich, das Zahlenfolgen als Funktionen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert waren? In der Vorlesung haben wir nun Folgen von Funktionen betrachtet. Im Zusammenspiel können wir also auch über Folgen von Folgen und deren punktweiser bzw. gleichmäßiger Konvergenz sprechen. Zur präzisen Bearbeitung führen wir zunächst die Menge aller reellen Zahlenfolgen $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ein (das Symbol $\mathcal{F}(D, E)$ bezeichne wieder die Menge aller Funktionen, die D in E abbilden). Wie sieht ein Element von $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ aus? Bisher haben wir es immer mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet. Eine Folge von Folgen ist nun nichts anderes als eine Abbildung $A \in V := \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}))$, die jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Folge $A(m) = (a_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$ zuordnet. Wie üblich bezeichnen wir A auch als $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Konsequent wäre es, die Folge mit $((a^{(m)})_{n\in\mathbb{N}})_{m\in\mathbb{N}}$ zu bezeichnen. Dies ist allerdings keine einheitlich benutzte Notation. Angenehmer ist es hier sicherlich, die Funktionsdarstellung der Folgen. Wir wollen im Folgenden die Menge V etwas genauer unter die Lupe nehmen.

1. Zeigen Sie, dass die Menge V einen Vektorraum bildet.
   Diese Frage ist so eigentlich gar nicht zu beantworten. Es müssen nämlich noch die Vektorraum Verknüpfungen definiert werden. Im Fall von Funktionenräumen $\mathcal{F}(D, E)$ (hier mit $D = \mathbb{N}$ und $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$) ist dies aber üblicherweise die *punktweise Definition*, d.h. die Summe $f+g$ zweier Funktionen $f, g \in \mathcal{F}(D, E)$ wird definiert durch $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ für $x \in D$ und λf ist gegeben durch $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Damit $f(x) + g(x)$ und $\lambda f(x)$ wiederum sauber definiert sind, muss eine Addition und eine skalare Multiplikation in E (also dort wo die Funktionswerte leben) möglich sein. Die punktweise Verknüpfung macht also nur Sinn, wenn E selbst ein Vektorraum ist. Allgemein kann man leicht zeigen, dass $\mathcal{F}(D, E)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, wenn E ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, indem man die Vektorraumaxiome nachprüft, z.B. das Distributivgesetz $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$ folgt durch punktweises Nachrechen aus dem entsprechenden Axiom in E. Zunächst wendet man die Definition der Verknüpfungen an

   $$[\lambda(f + g)](x) = \lambda(f + g)(x) = \lambda(f(x) + g(x)).$$

   Dann folgt mit den Rechenregeln in E

   $$\lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$$

   und schließlich mit den Definitionen rückwärts

   $$\lambda f(x) + \lambda g(x) = [(\lambda f) + (\lambda g)](x).$$

   Da der Zusammenhang für beliebiges x richtig ist, ergibt sich wie gewünscht die Gleichheit der Funktionen $\lambda(f + g)$ und $\lambda f + \lambda g$.

   In unserem Fall ist $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ und $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Also ist E ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und damit auch $V = \mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$.

2. Zeigen Sie, dass die Menge C_p der punktweise konvergenten Folgen von Folgen einen Unterraum von V bildet.
   Die Summe zweier punktweise konvergenter Folgen von Folgen ist wieder punktweise konvergent und das Gleiche gilt für skalare Vielfache. Ist nämlich $(A_n) \in C_p$ so existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} A_n(m)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Ist $(B_n) \in C_p$ ein weiteres Element und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so folgt mit den Grenzwertsätzen, dass auch $((\alpha A + \beta B)_n)$ konvergiert:

   $$\lim_{n\to\infty} (\alpha A + \beta B)_n(m) = \lim_{n\to\infty} (\alpha A_n(m) + \beta B_n(m)) = \alpha \lim_{n\to\infty} A_n(m) + \beta \lim_{n\to\infty} B_n(m). \quad (1)$$

3. Zeigen Sie, dass $\lim : C_p \to V$ eine lineare Abbildung ist.
   Der Beweis dieser Tatsache folgt aus Gleichung (1), wenn wir vereinbaren, dass $\lim A \in V$ die durch $m \mapsto \lim_{n\to\infty} A_n(m)$ definierte Folge bezeichnet.

4. Konstruieren Sie einige (nicht langweilige) Elemente von C_p, die punktweise gegen Null (also gegen die konstante Nullfolge) konvergieren.
   Da wäre zum Beispiel die Folge $A = (A_n)$, die durch $m \mapsto A_n(m) = m/n$ definiert ist. Es gilt $\lim_{n\to\infty} A_n(m) = 0$ für jedes $m \in \mathbb{N}$, also $\lim A = 0$, aber die Null wird immer später erreicht, je größer m ist. Ein ähnliches Phänomen tritt bei der Folge $B = (B_n)$ auf, deren Folgenglieder durch
   $$B_n(m) = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}, \qquad m \in \mathbb{N}$$
   gegeben sind. Auch hier konvergiert die Folge gegen die konstante Nullfolge. Betrachtet man die Folge an einem festen Punkt $m \in \mathbb{N}$, so gilt, dass $(B_n(m))_{n\in\mathbb{N}}$ nur für ein n von Null verschieden ist. Wann diese Nicht-Null erscheint, hängt aber vom Punkt m ab. Eine gutmütigere Folge ist da schon $C_n(m) = 1/(m+n)$, bei der die größte Abweichung vom Grenzwert immer an der Stelle $m = 1$ auftritt.

5. Konstruieren Sie ein Element von C_p, das nicht gleichmäßig konvergiert.
   Die ersten beiden Beispiele aus dem vorherigen Fall sind nicht gleichmäßig konvergent, denn
   $$\sup_{m\in\mathbb{N}} |A_n(m) - 0| = \infty, \qquad \sup_{m\in\mathbb{N}} |B_n(m) - 0| = 1, \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$