Dr. Michael Junk
Lutz Justen

SS 2001

Übung *Numerische Methoden der Analysis*

Rückgabe: 12:00, Freitag 04.05., Kasten: Justen

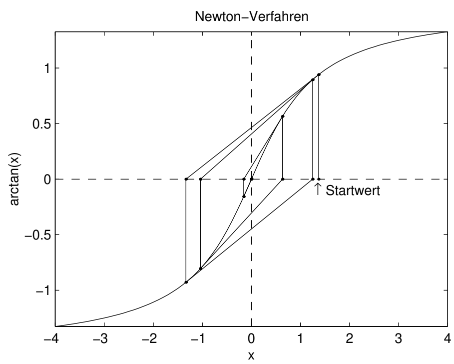
Hinweis für alle Programmieraufgaben: Geben Sie immer die Rechenzeit und die benötigten Gleitkommaoperationen (flops) an. Nähere Informationen finden Sie auf der **PraMa-Homepage**:

`http://www.mathematik.uni-kl.de/~junk/prama/prama.html`

unter dem Stichwort *Allgemeines*.

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \arctan(x)$. Klar: f hat genau eine Nullstelle bei $x = 0$. Es soll untersucht werden, wie sich die Wahl von unterschiedlichen Startwerten auf das Konvergenzverhaltens des Newton-Verfahrens auswirkt.



1) Zeigen Sie, dass für den Startwert $x_0^{(1)} = 1.20$ die Voraussetzungen für die Konvergenz des Newton-Verfahrens erfüllt sind, für den Startwert $x_0^{(2)} = 1.42$ jedoch nicht. Was ist mit $x_0^{(3)} = 1.37$?

2) Implementieren Sie das Newton-Verfahren. Erzeugen Sie für die Startwerte $x_0^{(2)}$ und $x_0^{(3)}$ Plots der Funktion f im Intervall $[-4, 4]$ mit den Punkten x_n und den Tangenten an den Stellen x_n, wobei x_n die n-te Iterierte des Newton-Verfahrens ist (siehe Abbildung). Was sind für die beiden Fälle jeweils günstige Abbruchbedingungen?

3) Untersuchen Sie für den Startwert $x_0^{(3)}$ das Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens. Stellen Sie den logarithmierten Fehler $\log_{10}|x_n - 0| = \log_{10}|x_n|$ grafisch dar (Tip: Benutzen Sie die Matlab-Funktion `semilogy`). Vergleichen Sie die Konvergenzrate mit der des Bisektionsverfahrens (Plot!).

– bitte wenden –

4) `Zusatz`: Zwischen $x_0^{(1)}$ und $x_0^{(2)}$ liegt ein Startwert, für den das Newton-Verfahren weder konvergiert, noch nach Unendlich divergiert. Leiten Sie eine Gleichung für diesen Startwert her und berechnen Sie ihn. Welches numerische Verfahren bietet sich an?

Aufgabe 2:

Es soll der Kreis bestimmt werden, der durch drei gegebene Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ und (x_3, y_3) läuft. Schreiben Sie das zugehörige Gleichungssystem für Mittelpunkt (x, y) und Radius r als Vektorgleichung $\boldsymbol{F}(x, y, r) = \mathbf{0}$ auf.

1) Berechnen Sie die Jacobimatrix $\boldsymbol{F}'$.

2) Unter welcher geometrischen Bedingung an (x_i, y_i) ist $\boldsymbol{F}'(x, y, r)$ an Stellen mit $r > 0$ invertierbar?

3) Implementieren Sie den Newton-Algorithmus für das Problem. Unterstützung für die grafische Ein- und Ausgabe finden Sie auf der PraMa-Homepage unter *Aufgabe 2*. Geben Sie einige Beispiele (Plots!) für unterschiedliches Konvergenzverhalten an. Konvergiert der Mittelpunkt schneller als der Radius?

4) Untersuchen Sie das quadratische Konvergenzverhalten an mehreren Beispielen numerisch durch grafische Darstellung der Folge $\log_{10} d_n$ (Plots!), wobei

$$d_n = \sqrt{\|\boldsymbol{P}_n - \boldsymbol{P}_{n-1}\|^2 + |r_n - r_{n-1}|^2}$$

und $\boldsymbol{P}_n$, r_n der approximative Mittelpunkt und Radius im Iterationsschritt n sind. Versuchen Sie d_n bis zur Maschinengenauigkeit (etwa 10^{-15}) fallen zu lassen. Welche n-Abhängigkeit von d_n erwarten Sie bei quadratischer Konvergenz des Verfahrens?