Dr. Michael Junk
Lutz Justen

SS 2001
Blatt 10

Übung *Numerische Methoden der Analysis*

Rückgabe: 12:00, Freitag 13.07., Kasten: Justen

Aufgabe 27:

Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\omega : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine positive Gewichtsfunktion, d.h. $\omega(t) > 0\ \forall t \in I$. ω sei genügend gutartig, so dass auf dem Raum $\mathcal{P}_k$ der Polynome k-ten Grades durch

$$(f, g)_\omega := \int_a^b \omega(t) f(t) g(t) dt$$

ein Skalarprodukt definiert ist für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

- Es gibt eine eindeutig bestimmte Folge von Polynomen $P_k \in \mathcal{P}_k$, $k = 0, 1, \ldots$, mit führendem Koeffizienten 1, die bezüglich $(\cdot, \cdot)_\omega$ orthogonal sind, d.h. $(P_k, P_j)_\omega = 0$ für $j, k \in \mathbb{N}_0$, $j \neq k$.
- Diese Polynome P_k genügen der sogenannten Drei-Term-Rekursion

  $$P_k(t) = (t - a_k)P_{k-1}(t) - b_k^2 P_{k-2}(t) \text{ für } k = 1, 2, \ldots$$

  mit den Anfangswerten $P_{-1} := 0$, $P_0 := 1$ und den Koeffizienten

  $$a_k = \frac{(tP_{k-1}, P_{k-1})_\omega}{(P_{k-1}, P_{k-1})_\omega}, \quad b_k^2 = \frac{(P_{k-1}, P_{k-1})_\omega}{(P_{k-2}, P_{k-2})_\omega} \text{ bzw. } b_1^2 = 0$$

  (Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion. Im Induktionsschritt argumentieren Sie, dass Sie $P_k - tP_{k-1}$ durch $\sum_{j=0}^{k-1} c_j P_j$ darstellen können und berechnen die c_j.)
- P_n ist das charakteristische Polynom der Matrix T_n für $n \geq 1$, d.h. $P_n = \det(tI - T_n)$, wobei

  $$T_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & & \\ b_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & b_n \\ & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

- Die Nullstellen von P_n sind die Eigenwerte von T_n.

Aufgabe 28:

Nach Aufgabe 27 genügen alle Orthogonalpolynome einer Drei-Term-Rekursion. Im Falle von $I = (-1, 1)$ und $\omega \equiv 1$ ist (s. Aufgabe 27) $a_k = 0$ und $b_k^2 = \frac{(k-1)^2}{(2k-1)(2k-3)}$. Bei dieser Wahl sind die Polynome P_k sind (bis auf Normierung) die Legendre-Polynome. Die k Nullstellen von P_k sind nach einem Satz in der Vorlesung paarweise verschieden im Intervall I und dienen als Stützstellen der Gauß-Quadratur.
Sei v_j ein mit $v_j \cdot v_j = 1$ normierter Eigenvektor von T_n zum j-ten Eigenwert x_j. Man kann zeigen, dass sich die Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ der Gauß-Quadraturformel mit den Stützstellen $x_1, \ldots, x_n$ berechnen lassen als $\alpha_j = 2(v_j)_1^2$, wobei $(v_j)_1$ die erste Komponente des Vektors v_j ist.

(i) Implementieren Sie eine Funktion, die für beliebiges n die Matrix T_n aufstellt und daraus Stützstellen und Koeffizienten extrahiert. (Hinweis: Nach Ausführung des Befehls `[V,D] = eig(T)` enthält die Matrix D die Eigenwerte als Diagonalelemente und V spaltenweise die Eigenvektoren.) Plotten Sie für $n = 40$ die Koeffizienten über den Stützstellen.

(ii) Seien die Funktionen $f_1(t) = |t|^3$, $f_2(t) = 1/(1+t^2)$ und $f_3(t) = t^{10}$ gegeben. Führen Sie eine Konvergenzanalyse der durch die oben erhaltene Gauß-Quadraturformel gegebene Approximation des Integrals dieser Funktionen über dem Intervall I durch. Entsprechen die Ergebnisse den in der Vorlesung erhaltenen Fehlerabschätzungen?

(iii) Wiederholen Sie Teil (ii) mit der Trapez- und der Simpson-Regel.

(iv) Zusatz: Wiederholen Sie Teil (ii) mit dem Romberg-Verfahren.

Aufgabe 29:

Implementieren Sie folgende Verfahren zur Lösung des linearen Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax$, $x(0) = \bar{x}$, mit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$:

Euler explizit	$\frac{x^{n+1}-x^n}{\Delta t} = Ax^n$, $x^0 = \bar{x}$
Euler implizit	$\frac{x^{n+1}-x^n}{\Delta t} = Ax^{n+1}$, $x^0 = \bar{x}$
Mittelpunktsregel explizit	$\frac{x^{n+1}-x^{n-1}}{2\Delta t} = Ax^n$, $x^0 = \bar{x}$, $\frac{x^1-x^0}{\Delta t} = Ax^0$
Mittelpunktsregel implizit	$\frac{x^{n+1}-x^n}{\Delta t} = A\frac{x^{n+1}+x^n}{2}$, $x^0 = \bar{x}$
Runge Kutta 4 explizit	$\frac{x^{n+1}-x^n}{\Delta t} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, $x^0 = \bar{x}$,
wobei	$k_1 = Ax^n$, $k_2 = A(x^n + \Delta t k_1/2)$,
und	$k_3 = A(x^n + \Delta t k_2/2)$, $k_4 = A(x^n + \Delta t k_3)$

(i) Im Fall $d = 1$ und $A = 1$, $\bar{x} = 1$ berechnen Sie die approximativen Lösungen mit $\Delta t = 0.5$ im Intervall $[0,3]$. Zeichnen Sie die Ergebnisse zusammen mit der exakten Lösung.

(ii) Führen Sie für das Beispiel in (i) eine Konvergenzanalyse durch. Stellen Sie dazu für jedes Verfahren den maximalen Fehler auf den Stützstellen im Intervall $[0,3]$ über der Gitterweite Δt in einem gemeinsamen doppellogarithmischen Diagramm dar.

(iii) Wenden Sie die Algorithmen auf das Hamiltonsche System (harmonischer Oszillator) an: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$. Zeichnen Sie die Lösungskurven für den Fall $\omega = 2\pi$, $\Delta t = 0$ im Zeitintervall $[0,5]$ (mit je 1000 Diskretisierungspunkten für die ersten beiden Algorithen, bzw. je 50 für die übrigen) und vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung. Nehmen Sie in den Vergleich auch den symplektischen Algorithmus $x_2^{n+1} = x_2^n - \omega^2 \Delta t x_1^n$, $x_1^{n+1} = x_1^n + \Delta t x_2^{n+1}$ mit auf.

(iv) Zeichnen Sie für die verschiedenen Algorithmen die zeitliche Änderung der Gesamtenergie $\omega^2 x_1^2 + x_2^2$. Was erwarten Sie von der exakten Lösung? Führen Sie eine numerische Konvergenzanalyse der Verfahren auf dem Intervall $[0,5]$ für den maximalen Energiefehler durch.