Dr. Michael Junk
Lutz Justen

SS 2001
Blatt 2

Übung *Numerische Methoden der Analysis*

Rückgabe: 12:00, Freitag 11.05., Kasten: Justen

Aufgabe 3:

Gegeben seien $n+1$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$.

(i) Begründen Sie, dass die Lagrange-Polynome $\psi_i(x) = \omega_i(x)/\omega_i(x_i)$, wobei $\omega(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ und $\omega_i(x) = \omega(x)/(x - x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, eine Zerlegung der Eins bilden, d.h.

$$\sum_{i=0}^{n} \psi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(ii) Für den Fall $n = 1$ mit $x_0 = 0, x_1 = 1$ berechnen Sie die so genannten Hermite-Polynome h_0, h_1, H_0, $H_1 \in \mathcal{P}_3$ durch Aufstellen von linearen Glaeichungssystemen, so dass für $i, j \in \{0, 1\}$ gilt:

$$\begin{array}{rclcrcl} h_i(x_j) & = & \delta_{ij} & \quad & h_i'(x_j) & = & 0 \\ H_i(x_j) & = & 0 & \quad & H_i'(x_j) & = & \delta_{ij} \end{array} \tag{1}$$

Stellen Sie diese Polynome grafisch dar (Plot!).

(iii) Zurück zum allgemeinen Fall $n \geq 0$. Leiten Sie Polynome h_i und H_i minimalen Grades her, die (1) für $i, j = 0, \ldots, n$ erfüllen. Wie ist der Grad dieser Polynome? (Tip: Verwenden Sie den Ansatz $h_i(x) = \psi_i^2(x) \cdot (ax + b)$, $H_i(x) = \psi_i^2(x) \cdot (cx + d)$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.)

(iv) Neben den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ seien Funktionswerte $y_0, \ldots, y_n$ und Ableitungen $y_0', \ldots, y_n'$ gegeben. Wie kann mit den Polynomen aus (iii) eine Funktion f mit $f(x_i) = y_i$ und $f'(x_i) = y_i'$, $i = 0, \ldots, n$ interpoliert werden?

(v) Implementieren Sie Funktionen zum Auswerten der Polynome h_i und H_i bei gegebenen Stützstellen. Plotten Sie die Polynome h_0, H_0, h_4 und H_4 unter Verwendung der Stützstellen $x_i = i/8$, $i = 0, \ldots, n = 8$.

– bitte wenden –

Aufgabe 4:

(i) Gegeben seien äquidistante Stützstellen $x_i := i \cdot h$, $h = 1/20$, und Funktionswerte $y_i := e^{x_i}$, $i = 0, \dots, n = 20$. Implementieren Sie den Algorithmus von Neville-Aitken und stellen Sie damit das Interpolationspolynom $P \in \mathcal{P}_n$ mit $P(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$, die Stützstellen und die Werte y_i grafisch dar.

(ii) Wiederholen Sie Aufgabenteil (i) mit den gestörten Werten $y_i^\epsilon := y_i + \epsilon_i$, $i = 0, \dots, n$, wobei ϵ_i kleine, normalverteilte "Messfehler" sind. (Tip für MATLAB: Verwenden Sie `y_eps = y + randn(size(y))/1000;`, wenn `y` der Vektor der y_i ist.)

Aufgabe 5:

Herr Dr. J. Munk hat eine lange und kraftraubende Diät hinter sich. Um einen Überblick über seinen Gewichtsverlust zu haben, hat er sein Gewicht regelmässig in eine Tabelle eingetragen (wird per email versandt und auf der PraMa-homepage bereitgestellt). Leider war er etwas faul und hat das nur ca. alle 9 Tage getan. Jetzt möchte er aus diesen Daten sein Gewicht für die Zeit zwischen den Messungen rekonstruieren. Da er mathematisch nicht besonders hell ist, sollen Sie ihm helfen.

(i) Implementieren Sie eine Funktion zum Auswerten der Lagrange-Polynome ψ_i, $i = 0, \dots, n =$ Anzahl der Messungen $+1$. Benutzen Sie diese, um die Gewichtskurve zu interpolieren, und stellen Sie das Interpolationspolynom grafisch dar.

(ii) Vergleichen Sie den gesamten Rechenaufwand (flops) für Berechnung der Koeffizienten plus Auswerten des Polynoms mit dem Neville-Aitken Algorithmus und der Monom-Methode, bei der das Interpolationspolynom als $\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ dargestellt wird. Welcher Algorithmus ist der effizienteste? Ändert sich daran etwas, wenn das Polynom an mehr oder weniger Stellen ausgewertet wird?

(iii) Ist der Graph des Interpolationspolynoms realistisch? Wie viel Gewicht verlor Herr Munk in den Tagen 145-148? Wie schwer ist er nach 160 Tagen?