Dr. Michael Junk
Lutz Justen

SS 2001
Blatt 3

Übung ***Numerische Methoden der Analysis***

Rückgabe: 12:00, Freitag 18.05., Kasten: Justen

Aufgabe 6:

Im Intervall $I = [0,1]$ seien die äquidistanten Stützstellen $x_i = i/n$, $i = 0, \ldots, n$ gegeben. Mit den zugehörigen Lagrange-Polynomen ist die Lebesguesche Konstante definiert durch

$$\Lambda_n = \max_{x \in I} \sum_{i=0}^{n} |\psi_i(x)|.$$

(i) Berechnen Sie Λ_n für $n = 1, \ldots, 30$ (ermitteln Sie das Maximum über eine genügend große, endliche Teilmenge von I) und stellen Sie das Ergebnis in einer logarithmischen Skala dar (Plot). Welche n-Abhängigkeit von Λ_n für $n \to \infty$ legt das Ergebnis nahe? (Begründung)

(ii) Führen Sie das gleiche Experiment mit den Tschebyscheff-Stützstellen

$$x_i = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) + 1\right), \qquad i = 0, \ldots, n.$$

durch und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Fall äquidistanter Stützstellen (logarithmischer Plot).

(iii) Wiederholen Sie Aufgabe 4 (Blatt 2) mit den Tschebyscheff-Stützstellen.

(iv) Sei P das Interpolationspolynom zu den ungestörten und P^ϵ das Polynom zu den gestörten Daten in (iii). Berechnen sie den Faktor

$$V = \frac{\max_{x \in I} |P(x) - P^\epsilon(x)|}{\max_{i=0,\ldots,20} |y_i - y_i^\epsilon|}$$

und vergleichen Sie ihn mit Λ_{20}. Kommentar?

Aufgabe 7:

Wir betrachten erneut die Stützstellen $x_i = i/n$, $i = 0, \ldots, n$ im Intervall $I = [0,1]$ mit der zugehörigen Lebesgueschen Konstante Λ_n (siehe Aufgabe 6). Zeigen Sie

(i) Für $t \neq i$ ist $\psi_i(t/n) = (-1)^{n-i} \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{i!(n-i)!(t-i)}$.

(ii) Aus (i) folgt $\psi_i\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\binom{n}{i}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

(iii) Aus (ii) folgt $\Lambda_n \geq \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

(iv) Aus (iii) folgt $\Lambda_n \geq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{2^n}{n^{3/2}} (1 + \mathcal{O}(1/n))$. Deckt sich dieses Ergebnis mit Ihren Beobachtungen in Aufgabe 6 (i)? (Hinweis: benutzen Sie die Stirling-Formel $k! = \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k (1 + \mathcal{O}(1/k))$ für $k = n$ und $k = 2n$.)

Aufgabe 8:

Die Newton-Form des Interpolationspolynoms eignet sich besonders gut in Fällen, wo die Stützstellen nicht a-priori bekannt sind. Diese Situation tritt zum Beispiel bei der Interpolation von unstetigen Funktionen auf: seien für ein $n \in \mathbb{N}$ an den Stellen $x_i = i/n$, $i \in \mathbb{Z}$ die Funktionswerte $y_i = f(x_i)$ einer unstetigen Funktion gegeben. Dann wird durch folgenden Algorithmus eine Interpolationsfunktion g definiert die stückweise aus Polynomen vom Grad $m \geq 0$ besteht.

1) Für $x \in \mathbb{R}$ bestimme die x am nächsten gelegene Stützstelle x_i.

2) Setze die Stützstellenmenge auf $S_0 = \{x_i\}$.

3) Ist $S_k = \{x_{i_0}, \ldots, x_{i_k} : i_0 < \cdots < i_k\}$ konstruiert, so berechne

$$a = |f[x_{i_0-1}, x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}]|, \qquad b = |f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_k+1}]|$$

4) Falls $a \leq b$, setze $S_{k+1} = \{x_{i_0-1}, x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}\}$ ansonsten definiere die neue Stützstellenmenge als $S_{k+1} = \{x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_k+1}\}$.

5) Wiederhole Schritte (3) und (4) bis S_m konstruiert ist.

6) Mit den in (3) bereits berechneten dividierten Differenzen kann nun das Newton Interpolationspolynom an der Stelle x effizient ausgewertet werden. Das Ergebnis definiert $g(x)$.

Implementieren Sie den angegebenen Algorithmus. Als Testbeispiel verwenden sie $n = 7$ und $y_i = f(x_i)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x} - 1 & x < \frac{1}{2} \\ \sin(6x - 3) - 3 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

(i) Plotten Sie $g(x)$ für $x \in [0, 1]$ und $m = 0, \ldots, 4$.

(ii) Ändern Sie im Algorithmus die Bedingung $a \leq b$ durch $a \geq b$ und führen Sie (i) erneut durch. Erklären Sie das Ergebnis? Warum ist das Kriterium $a \leq b$ sinnvoller?

(iii) Ersetzen Sie im Algorithmus die adaptive Stützstellenmenge S_m durch die a-priori bestimmte Menge $S_2 = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ und verfahren Sie wie in (i).

(iv) Bestimmen Sie das "handelsübliche" Interpolationspolynom zu $x_0, \ldots, x_7$ und $f(x_0), \ldots, f(x_7)$. Was halten Sie von dem Ergebnis?