Dr. Michael Junk
Lutz Justen

SS 2001
Blatt 4

Übung *Numerische Methoden der Analysis*

Rückgabe: 12:00, Freitag 25.05., Kasten: Justen

Aufgabe 9:

(i) Seien $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ linear unanbhängige Funktionen mit $\varphi_j : \mathbb{R}^k \supset D \longrightarrow \mathbb{C}$ und sei $\Phi := \operatorname{span}(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ der von ihnen aufgespannte lineare Raum über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie:

Jede Interpolationsaufgabe zu $n+1$ beliebigen, paarweise verschiedenen Stützstellen $x_i \in D$ und zugehörigen Funktionswerten $y_i \in \mathbb{C}$ ist durch ein $\varphi \in \Phi$ eindeutig lösbar

$$\Updownarrow$$

Φ erfüllt die folgende Nullstelleneigenschaft:
Jedes $0 \neq \varphi \in \Phi$ hat in D höchstens n Nullstellen.

(ii) Es sei

(a) $D = \mathbb{R}_+$, $\varphi_j : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi_j(x) = \frac{1}{x+j}$, $j = 0, \ldots, n$.

(b) $D = [0, 2\pi)$, $\varphi_j : D \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\varphi_j(x) = e^{ijx}$, $j = 0, \ldots, n$.

(c) $D = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, $\varphi_j : D \longrightarrow \mathbb{R}$ für $j = 0, 1, 2$ mit $\varphi_0(x,y) = 1$, $\varphi_1(x,y) = x$ und $\varphi_2(x,y) = y$.

Für (a) und (b) zeigen Sie, dass Φ die in (i) genannte Nullstelleneigenschaft erfüllt, für (c) jedoch nicht. Geben Sie für (c) eine Interpolationsaufgabe mit 3 Stützstellen an, die unlösbar ist. (Siehe auch Aufgabe 10).

Aufgabe 10:

Aufgabe 9 (ii) (c) zeigt, dass die zweidimensionale Interpolation durch Polynome in zwei Variablen bei beliebiger Wahl von Stützstellen auf Schwierigkeiten stößt. Bei spezieller Anordnung der Stützstellen und Beschränkung auf Polynome bestimmter Bauart dagegen gelingt die Interpolation.
In der Ebene seien $(n+1)\cdot(m+1)$ paarweise verschiedene Punkte $P_{ij} = (x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2$ für $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$ gegeben mit jeweils zugehörigen Funktionswerten $f_{ij} \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass es genau ein Polynom p vom Typ

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} x^i y^j$$

gibt mit $p(x_i, y_j) = f_{ij}$ für $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$.

(ii) Wie kann dieses Polynom ohne explizite Berechnung der Koeffizienten a_{ij} ausgewertet werden? (Tip: Führen Sie das 2D-Problem auf 1D-Interpolationsprobleme zurück.)

(iii) Auf der PraMa-Homepage ist ein zweidimensionaler Datensatz (x_i, y_i, f_{ij}) mit $i, j = 0, \ldots, 12$ gegeben, der durch ein Polynom wie in (i) interpoliert werden soll. Für das Einlesen der Daten und eine effektvolle grafische Ausgabe ist zusätzlich eine Matlab-Routine vorbereitet. Erstellen Sie damit einen Plot des Interpolationspolynoms sowie der Stützstellen.

Aufgabe 11:

Auf einer Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ seien Punkte (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$ gegeben.

(i) Geben Sie ein Verfahren an, mit dem Polynome $P, Q : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ bestimmt werden können, so dass für

$$\Gamma_n = \{(P(t), Q(t)) : t \in [a, b]\}$$

die Interpolationsbedingung $(x_i, y_i) \in \Gamma_n \cap \Gamma$, $i = 0, \ldots, n$ erfüllt ist und Γ_n die Kurve Γ "möglichst gut" approximiert.

(ii) Testen Sie Ihr Verfahren mit den beiden Datensätzen auf der PraMa-Homepage (die Dateien enthalten die Punktepaare (x_i, y_i) in der gleichen Reihenfolge wie sie auf der Kurve durchlaufen werden). Erstellen Sie jeweils einen Plot mit der interpolierten Kurve und den Stützstellen.

(iii) Können Sie die Qualität der Interpolation durch die Angabe einer Fehlerformel quantifizieren?