Dr. Michael Junk
Lutz Justen

SS 2001
Blatt 5

Übung ***Numerische Methoden der Analysis***

Rückgabe: 12:00, Freitag 01.06., Kasten: Justen

Aufgabe 12:

Sei $n = 6$, $m = 1$, $r = 2m + 1 = 3$ und $\Delta_n = \{x_i = \frac{i}{n} | i = 0, \dots, n\}$. Die Funktionen $p_j(x) = (x - x_0)^j$, $j = 0, \dots, r$ und $q_j(x) = (x - x_j)_+^r$, $j = 1, \dots, n-1$ bilden dann eine Basis des Spline-Raumes $\mathscr{S}(r, \Delta_n)$. Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - \frac{1}{2})_+^8$.

(i) Implementieren Sie Funktionen, mit denen die Splines p_j und q_j sowie ihre Ableitungen ausgewertet werden können. Plotten Sie alle p_j und q_j, sowie die ersten drei Ableitungen von q_2.

(ii) Mit dem Ansatz $S = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j p_j + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j q_j$ und leiten Sie die beiden linearen Gleichungssysteme her, auf die das Interpolationsproblem $S(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$ mit (H) bzw. (N) Randbedingungen führt. Drücken Sie dabei die Koeffizienten im Gleichungssystem mit den Basisfunktionen p_j und q_j aus.

(iii) Schreiben Sie eine Funktion, die die entsprechenden Matrizen und rechte Seiten der in (ii) hergeleiteten Gleichungssysteme erzeugt. Mit der Matlab-Funktion `spy` erstellen Sie Plots der nicht-Null Einträge der Matrizen.

(iv) Lösen Sie die beiden Gleichungssysteme (d.h. für (H) und (N) Randbedingungen) und plotten Sie die beiden Splines.

(v) Biegeenergie und linearisierte Biegeenergie einer Funktion g über dem Intervall $[0,1]$ sind definiert als

$$E(g) := \int_0^1 \frac{(g''(x))^2}{(1 + g'(x)^2)^3} \, \mathrm{d}x$$
$$E_{lin}(g) := \int_0^1 (g''(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

Berechnen Sie Näherungen dieser Energien für f und die beiden Splines aus (iv) mit Hilfe von Riemann-Summen, d.h. unterteilen Sie das Intervall $[0,1]$ in genügend kleine Teilintervalle gleicher Größe, werten den Integranden an den Mittelpunkten der Teilintervalle aus, nehmen die Summe und multiplizieren das Ergebnis mit der Teilintervalllänge. Stimmt das Ergebnis mit ihren Erwartungen überein?

(vi) Wiederholen Sie (v) für $f(x) = \cos(2\pi x)$. Was fällt im Vergleich zum Ergebnis bei (v) auf?

Aufgabe 13:

In einem Experiment werden relative Häufigkeiten einer Größe bestimmt und in ein Histogramm eingetragen, d.h. der Wertebereich der Größe wird in n Intervalle $[x_i, x_{i+1})$ zerlegt, wobei $x_0 < \cdots < x_n$ und jedem Intervall wird der Wert $w_i =$(Anzahl der Messwerte x mit $x \in [x_i, x_{i+1})$)/(Anzahl der Messwerte * Intervallbreite $x_{i+1} - x_i$) zugeordnet. Gesucht ist nun eine Wahrscheinlichkeitsdichte $f : [x_0, x_n] \mapsto [0, \infty)$, die zu den Messergebnissen passt, d.h.

$$\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\, dt = w_i, \qquad i = 0, \ldots, n-1. \tag{1}$$

(i) Bestimmen Sie einen Spline $f \in \mathscr{S}(2, \{x_0, \ldots, x_n\})$ der dieses Problem löst mit der zusätzlichen Bedingung $f(x_0) = f(x_n) = 0$. (Trick: Schreiben Sie (1) als Interpolationsproblem für die Stammfunktion $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ – der sogenannten Verteilungsfunktion.)

(ii) Zeigen Sie, dass die in (i) gefundene Lösung eindeutig bestimmt ist (sogenannter Histo-Spline).

(iii) Wenden Sie das Verfahren auf die Gewichtsdaten der letzten 36 Tage des Herrn Munk an (siehe PraMa-Homepage - dort gibt es auch eine vorbereitete Matlab Routine, die die Daten einliest, den Wertebereich in n Intervalle zerlegt und das zugehörige Histogramm zeichnet). Berechnen Sie den Histo-Spline für $n = 8$ und zeichnen Sie ihn zusammen mit dem Histogramm. Was passiert für $n = 12$? Kommentar?

Aufgabe 14:

Sei $r \geq 1$ und $\Delta_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ ein Gitter. Auf $\mathscr{S}(r+1, \Delta_n)$ und $\mathscr{S}(r, \Delta_n)$ werden Operatoren $\mathcal{D}$ und $\mathcal{I}$ eingeführt

$$(\mathcal{D}S)(x) := S'(x) \qquad\qquad S \in \mathscr{S}(r+1, \Delta_n)$$
$$(\mathcal{I}S)(x) := \int_{x_0}^{x} S(t)\, dt \qquad\qquad S \in \mathscr{S}(r, \Delta_n)$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ eine lineare Abbildung von $\mathscr{S}(r+1, \Delta_n)$ nach $\mathscr{S}(r, \Delta_n)$ ist. Bestimmen Sie den Kern von $\mathcal{D}$. Welchen Rang hat $\mathcal{D}$?.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}$ eine lineare Abbildung von $\mathscr{S}(r, \Delta_n)$ nach $\mathscr{S}(r+1, \Delta_n)$ ist. Bestimmen Sie den Kern von $\mathcal{I}$. Welchen Rang hat $\mathcal{I}$?.

(iii) Mit den Basisfunktionen

$$(1, x - x_0, \ldots, (x - x_0)^s, (x - x_1)_+^s, \ldots, (x - x_{n-1})_+^s), \qquad s \in \{r, r+1\}$$

geben Sie die Matrixdarstellungen D, I der Operatoren $\mathcal{D}$ und $\mathcal{I}$ an.

(iv) Zeigen Sie, dass

$$DI = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad ID = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$