Dr. Michael Junk
Lutz Justen

SS 2001
Blatt 6

Übung *Numerische Methoden der Analysis*

Rückgabe: 12:00, Freitag 15.06., Kasten: Justen

Aufgabe 15:

Sei $m = 1$ und $r = 2m + 1 = 3$. In Aufgabe 12 wurden Routinen entwickelt, mit denen kubische Splines ausgewertet werden können. In dieser Aufgabe soll das Konvergenzverhalten von Splines mit (H) und (N) Randbedingungen untersucht werden. Dazu seien die Funktionen $f_1, f_2 : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \quad \text{und} \quad f_2(x) = |x|^3$$

(i) Für $n = 11, 13, 15, \ldots, 59$ sei $h_n = \frac{1}{n}$ die Gitterweite und $\Delta_n = \{x_0 = -\frac{1}{2}, x_1 = -\frac{1}{2} + h_n, \ldots, x_n = \frac{1}{2}\}$ ein äquidistantes Gitter im Intervall $I := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Berechnen Sie jeweils die Spline-Interpolierenden S_H ((H)-Randbedingung) und S_N ((N)-Randbedingung) zu der Funktion f_1 und approximieren Sie den Interpolationsfehler $\max_{x \in I} |f_1(x) - S_H(x)|$ bzw. $\max_{x \in I} |f_1(x) - S_N(x)|$ numerisch.

(ii) Tragen Sie die Interpolationsfehler doppellogarithmisch über den Gitterweiten auf. (Tip: Verwenden Sie die Matlab-Funktion `loglog`.) Welche h-Abhängigkeit legt das Ergebnis nahe? Vergleichen Sie ihre Vermutung mit den theoretischen Ergebnissen.

(iii) Wiederholen Sie (i) und (ii) für f_2. Erklären Sie die Unterschiede im Ergebnis.

Aufgabe 16:

Im Falle eines regulären Gitters, lassen sich die B-Splines durch Faltung definieren: sei $\phi_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ die Indikatorfunktion des Intervalls $[0, 1)$ und $\phi_r = \phi_{r-1} * \phi_0$ für $r \in \mathbb{N}$, wobei die Faltung zweier Funktionen $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ durch

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y) g(y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}$$

definiert ist. Berechnen Sie $\phi_1, \ldots, \phi_4$ und plotten Sie das Ergebnis. Zeigen Sie für $r \in \mathbb{N}$

(i) $\phi_r \in C^{r-1}(\mathbb{R})$ ist stückweise polynomial vom Grad r, d.h. ϕ_r ist ein Spline.

(ii) $\phi_r \geq 0$ und $\phi_r(x) > 0$ genau dann, wenn $x \in (0, r)$.

(iii) $\phi_r^{(i)}(x) = \phi_r(x - i)$, $i \in \mathbb{Z}$ bilden eine Zerlegung der Eins, d.h. $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi_r(x - i) = 1$.

(iv) $\int_{\mathbb{R}} \phi_r(x)\, dx = 1$ für alle $r \in \mathbb{N}$.

Begründen Sie warum ϕ_r ein B-Spline ist.

Aufgabe 17:

(i) Sei $\Delta_n = \{x_i | a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$. Bisher wurden nur Existenz und Eindeutigkeit von interpolierenden Splines im Splineraum $\mathscr{S}(2m+1, \Delta_n)$ gezeigt, also für Splines mit ungeradem Polynomgrad. Zur Konstruktion eines die Funktion f interpolierenden *quadratischen* Splines $S \in \mathscr{S}(2, \Delta_n)$, der die Randeigenschaft $S'(a) = f'(a)$ erfüllt, benutzen Sie folgenden Ansatz:
Zunächst führt man die Unbekannten $a_i = S'(x_i)$ ein $(i = 0, \ldots, n)$. Wegen der stückweisen Linearität und Stetigkeit von S' gilt dann für $i = 0, \ldots, n-1$

$$S'(x) = s_i'(x) = \frac{x - x_i}{h_i} a_{i+1} - \frac{x - x_{i+1}}{h_i} a_i, \qquad x_i \leq x \leq x_{i+1},\ h_i = x_{i+1} - x_i$$

woraus durch Integration folgt

$$S(x) = s_i(x) = \frac{a_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 - \frac{a_i}{2h_i}(x - x_{i+1})^2 + b_i$$

mit gewissen Konstanten b_i. Leiten Sie lineare Gleichungssysteme für die a_i, $i = 0, \ldots, n$ und b_i, $i = 0, \ldots, n-1$ her. Begründen Sie damit die eindeutige Existenz des interpolierenden Splines S.

(ii) Es seien $\Delta_n = \{x_i | a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ und $\Delta_N = \{t_j | a = t_0 < \ldots < t_N = b\}$ zwei Gitter über $I = [a, b]$ mit $\Delta_n \subset \Delta_N$, d.h. Δ_N sei eine Verfeinerung von Δ_n. Zu gegebener Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$ seien $S \in \mathscr{S}(2m+1, \Delta_n)$ bzw. $\tilde{S} \in \mathscr{S}(2m+1, \Delta_N)$ Interpolierende mit gleichen Randeigenschaften (N), (H) oder (P). Begründen Sie: Es gilt

$$||S^{(m+1)}||_2 \leq ||\tilde{S}^{(m+1)}||_2$$

Schöne Ferien!