Dr. Michael Junk
Lutz Justen

Übung ***Numerische Methoden der Analysis***

Rückgabe: 12:00, Freitag 22.06., Kasten: Justen

Aufgabe 18:

Sei $r = 3$, $n = 12$, $h = \frac{1}{n}$ und $\Delta_n = \{x_i = ih | i = 0, \dots, n\}$ ein äquidistantes Gitter.

(i) Zeigen Sie, dass es in $\mathscr{S}(r, \Delta_n)$ eindeutig bestimmte Splines S_i, $i = 0, \dots, n$, sowie T_0 und T_n gibt, so dass $S := f'(x_0)T_0 + f'(x_n)T_n + \sum_{i=0}^{n} f(x_i)S_i$ das Spline-Interpolationsproblem mit (H)-Randbedingungen zu einer beliebigen Funktion $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ löst. Diese Splines sind das äquivalent zu den Lagrange-Polynomen bei der Polynominterpolation.

(ii) Implementieren Sie den Algorithmus von deBoor. Benutzen Sie diesen, um die "Lagrange-Splines" S_0, S_4, S_8 und T_0 auszuwerten und zusammen mit den Stützstellen zu plotten. (Hinweis: Für den deBoor-Algorithmus müssen sie den Stützstellenvektor nach beiden Seiten erweitern. Warum?)

(iii) Vergleichen Sie die "Lagrange-Splines" mit den Lagrange-Polynomen ψ_i, $i = 0, \dots, n$. Warum versprechen die "Lagrange-Splines" bessere Ergebnisse bei der Interpolation. Welche können mit weniger Rechenoperationen ausgewertet werden? Wo liegen Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Spline- und Polynominterpolation hinsichtlich Vorgehensweise beim Auswerten des Splines bzw. Polynoms?

(iv) Wie können kubische B-Splines $B_{i,3} \in \mathscr{S}(r, \Delta_n)$ mit Hilfe des Algorithmus von deBoor ausgewertet werden? Plotten Sie $B_{0,3}$ und $B_{5,3}$ sowie die Stützstellen.

Aufgabe 19:

In der Realität ist es nicht möglich, ein Signal als stetige Funktion f zu messen, sondern man nimmt punktweise Messungen $f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_n)$ an üblicherweise äquidistanten Zeitpunkten $t_0 = 0, t_1 = \Delta t, t_2 = 2\Delta t$ und so weiter, d.h. man tastet das Signal ab (engl.: sampling). Die Abtastrate $\frac{1}{\Delta t}$ spielt bei der diskreten Fourier-Transformation eine wichtige Rolle.

(i) Sei $\omega = 10, 12, \dots, 200$ und $f(t) = \cos(\omega t)$. Wir tasten dieses Signal mit einer Abtastrate von $\frac{1}{\Delta t} = 20$ im Intervall $[0, 1]$ ab (insgesamt 21 Messungen). Auf der PraMa-Homepage ist eine Funktion vorbereitet, die diesen Vorgang simuliert. Für welche ω ist der Unterschied zwischen Signal und (linear interpoliertem) Abtastsignal relativ klein? Wo siedeln Sie die Grenze zwischen guter und schlechter Übereinstimmung an? Was passiert bei $\omega \approx 40\pi$? Begründen Sie Ihre Vermutung mathematisch.

(ii) Geben Sie in Matlab den Befehl `plot(sin(1:3000),'.')` ein. Beschreiben sie mathematisch das Aussehen des Graphen, indem Sie die Frequenz der erkennbaren, niederfrequenten (verschobenenen) Sinusschwingungen herleiten.

(iii) Herr Munk wurde zu Schreinemakers neuer Sendung Big Diet eingeladen. Er liebt karierte Hemden über alles und will bei der Sendung unbedingt eins tragen. Allerdings hat er gehört, dass karierte Hemden im Fernsehen betrachtet flackern und seltsame Muster ergeben (sog. Moire-Muster). Dies will er unbedingt vermeiden. Wie gross muss das Karomuster mindestens sein, damit Herr Munk im Fernsehen nicht flackert? (Das Fernsehen habe eine Bildpunktauflösung von 500*500 Punkten, der Öffnungswinkel der Kameras sei 30° und Herr Munk sei 5 Meter von der Kamera entfernt. Die Kameralinse kann als punktförmig angenommen werden.)

Aufgabe 20:

Für eine 2π-periodische Funktion $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ definieren wir die abgebrochene Fourierreihe der Länge $N = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$f_N(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt}, \qquad c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Faktoren $c_k(f)$ heißen Fourierkoeffizienten von f.

(i) Zeigen Sie, dass f_N reellwertig ist, falls f reellwertig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $c_k(f_l) = \delta_{lk}$ für $f_l(t) = e^{ilt}$.

(iii) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten für die periodischen Fortsetzungen der auf $[-\pi, \pi)$ definierten Funktionen $f^{(1)}(t) = t$, $f^{(2)}(t) = (\pi + t)(\pi - t) - 2\pi^2/3$,

$$f^{(3)}(t) = (\pi + t)(5\pi/6 + t)(\pi/2 + t)t(\pi/2 - t)(5\pi/6 - t)(\pi - t)$$

sowie der periodischen Fortsetzung der charakteristischen Funktion $f^{(5)}$ des Intervalls $(-\pi/5, \pi/5)$. Plotten Sie jeweils das Spektrum $|c_k(f^{(i)})|$ für $k = -30, \dots, 30$.

(iv) Plotten Sie die abgebrochenen Fourierreihen der $f^{(i)}$ für $n = 5, 15, 30$, $N = 2n+1$ zusammen mit $f^{(i)}$.