Dr. Michael Junk
Lutz Justen

Übung *Numerische Methoden der Analysis*

Rückgabe: 12:00, Freitag 29.06., Kasten: Justen

Aufgabe 21:

Sei $E = \mathbb{C}$, $X = \{e^{it} : t \in [-\pi, \pi]\}$, and $\mathcal{P} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{P_k : X \mapsto \mathbb{C} : P_k(z) = z^k, k \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Voraussetzungen des Satzes von Stone-Weierstraß (im Komplexen) erfüllt sind, d.h.

(i) E ist ein normierter Raum und $X \subset E$ ist eine kompakte Teilmenge.

(ii) $\mathcal{P}$ ist eine punkttrennende Unteralgebra der Algebra $C(X)$ der stetigen, $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf X (P ist punkttrennend, wenn für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $P \in \mathcal{P}$ existiert mit $P(x) \neq P(y)$).

(iii) Die konstante Funktion $e(z) = 1$ ist in $\mathcal{P}$ enthalten und mit $P \in \mathcal{P}$ enthält $\mathcal{P}$ auch die konjugiert komplexe Funktion $\bar{P}$.

Der Satz von Stone-Weierstraß besagt dann, dass $\mathcal{P}$ in $C(X)$ dicht ist bezüglich der Supremumsnorm. Zeigen Sie damit, dass für eine 2π-periodische Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ und Koeffizienten $\beta_{-N}, \ldots, \beta_N \in \mathbb{C}$ existieren, so dass

$$\|Q_N - f\|_\infty < \epsilon, \quad \|Q_N'' - f''\|_\infty < \epsilon, \qquad Q_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \beta_k e^{ikt}.$$

Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

(iv) Zeigen Sie, dass $g(e^{it}) = f''(t)$ ein Element von $C(X)$ definiert. Nutzen Sie den Satz von Stone-Weierstrass um eine Funktion $P \in \mathcal{P}$ zu finden, die nahe an g liegt. Setzen Sie $\tilde{Q}_N(t) = P(e^{it})$ und basteln Sie daraus Q_N durch Integration.

Aufgabe 22:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $N = 2n+1$, $\Delta t = 2\pi/N$, $\mathcal{T} = \Delta t\mathbb{Z}$ und $\mathcal{M}_{DFT} = \{f : \mathcal{T} \mapsto \mathbb{C} : f(t+2\pi) = f(t)\}$. Auf $\mathcal{M}_{DFT}$ definieren wir Operationen

- **Translation**: $(T_\delta f)(t) = f(t - \delta)$ mit $\delta \in \mathcal{T}$.
- **Ableitung**: $(\Delta f)(t) = \frac{f(t+\Delta t) - f(t-\Delta t)}{2\Delta t}$.
- **Faltung**: $(f * g)(t) = \sum_{j=-n}^{n} f(t - j\Delta t) g(j\Delta t)\Delta t$.
- $\mathbb{L}^2$**-Skalarprodukt**: $\langle f, g\rangle = \sum_{j=-n}^{n} f(j\Delta t)\bar{g}(j\Delta t)\Delta t$.
- **Fouriertransformation**: $(\mathcal{F}f)(k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^{n} f(j\Delta t) e^{-ikj\Delta t}\Delta t$.

Weiter sei $\delta_0(t) = 1$ für $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ und $\delta_0(t) = 0$ für alle anderen $t \in \mathcal{T}$. Berechnen Sie

(i) $\mathcal{F}1$, $\mathcal{F}\delta_0$,

(ii) $\mathcal{F}(f * g)$, $\mathcal{F}(fg)$, $\mathcal{F}(fg_k)$ mit $g_k(t) = e^{ikt}$,

(iii) $\mathcal{F}\mathcal{T}_\delta f$, $\mathcal{F}\Delta f$,

(iv) $\langle f, g \rangle$.

Drücken Sie das Ergebnis stets durch $\mathcal{F}f$ und $\mathcal{F}g$ aus. Definieren Sie analoge Operationen auf $\mathcal{M}_{FR} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f(t + 2\pi) = f(t)\}$ (Fourierreihe) und auf $\mathcal{M}_{FT} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \operatorname{supp} f \text{ kompakt}\}$ (Fouriertransformation) und bestimmen Sie Zusammenhänge wie in (i) bis (iv). (Tip: Im Grenzwert $n \to \infty$ können Resultate zur Fourierreihe aus DFT abgeleitet und durch Periodisierung von $f|_{[-M,M]}$ und $M \to \infty$ können Resultate zur Fouriertransformation aus denen der Fourierreihe gewonnen werden.)

Aufgabe 23:

Auf der Homepage finden Sie die Sounddatei `telefon.raw` (Abtastrate 11025 Hz) mit einer in Sinusschwingungen kodierten Telefonnummer. Solche Signale kann man deutlich hören, wenn man auf einem Tastentelefon (mit Tonwahl) eine Nummer eintippt. Ziffern sind durch Überlagerung von jeweils zwei Sinusschwingungen kodiert. Die Frequenzen entnehmen Sie der Tabelle.

Hz	1209	1336	1477
697	1	2	3
770	4	5	6
852	7	8	9
941	$*$	0	#

Die Tabelle sagt aus, dass zum Beispiel die Ziffer 8 durch Überlagerung von zwei Sinusschwingungen der Frequenzen 852 und 1336 Hz kodiert wird.

(i) Plotten Sie das Signal. Wie viele Ziffern enthält das Signal? (Zwischen den Ziffern ist jeweils eine kurze Pause.)

(ii) Für jede Ziffer extrahieren Sie den Teil des Signals, wo diese kodiert wird, und wenden Sie mittels Matlabs `fft`-Befehl eine diskrete Fourier-Transformation an. Plotten Sie die extrahierten Signale und die diskreten Spektren jeder Ziffer. Warum sehen Sie vier Spitzen in den Spektrum-Plots?

(iii) Wie ist die richtige Frequenz-Achsen-Skalierung in den Spektrum-Plots, d.h. welcher Eintrag im Spektrum-Vektor gehört zu welcher Frequenz? Nun stellen Sie anhand der Spitzen in den Spektren fest, welche Ziffern gewählt wurden.

(iv) Der Erste, der die richtige Nummer wählt und den Lösungssatz "Oh, guten Tag, Herr Neunzert!" sagt, gewinnt einen tollen Preis.