Dr. Michael Junk
Lutz Justen

Übung *Numerische Methoden der Analysis*

Rückgabe: 12:00, Freitag 06.07., Kasten: Justen

Aufgabe 24:

Auf der Homepage ist ein Programm vorbereitet, das ein Bild der Größe 128 x 128 (von Al) einliest und anzeigt. Auf der zweidimensionalen diskreten Fouriertransformation des Bildes werden dann verschiedene Operationen durchgeführt. Anschließend wird das Bild rücktransformiert und angezeigt.
Welche Transformation ausgeführt wird, kann als Eingabeparameter "Filter" übergeben werden:

- Filter=0: Setze Spektrum ausserhalb eines Kreises auf 0
- Filter=1: Setze Spektrum innerhalb eines Kreises auf 0
- Filter=2: Schneide Teil des Bildes aus und kopiere dessen (kleinere) DFT in eine Null-Matrix der Originalgröße 128 x 128
- Filter=3: Multipliziere Zeilen und Spalten des Spektrums mit Phasenfaktoren
- Filter=4: Multipliziere das Spektrum mit *sinc*-Funktionen (s. Matlab-Hilfe zu *sinc*)
- Filter=5: Verschiebe das Spektrum

Analysieren Sie die Filteralgorithmen und geben Sie eine mathematische Erklärung für ihre Wirkung auf die rücktransformierten Bilder.

Aufgabe 25:

Seien $n \in \mathbb{N}$, $N = 2n+1$, $t_k = \frac{2\pi k}{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ und $C^r \ni f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-periodisch, $r \geq 2$. Die Koeffizienten der Fourierreihe $c_k(f)$ bzw. der DFT $d_k(f)$ sind definiert durch

$$c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

und

$$d_k(f) := \frac{1}{N} \sum_{m=-n}^{n} f(t_m) e^{-ikt_m}$$

(i) Zeigen Sie, dass das "trigonometrische Polynom" $P_N(t) = \sum_{k=-n}^{n} d_k(f)e^{ikt}$ für reellwertige Funktionen f geschrieben werden kann als

$$P_N(t) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt)$$

, geben Sie a_k, b_k in Abhängigkeit von d_k an und zeigen Sie, dass f von P an den Stellen $t_k \forall k \in \mathbb{Z}$ interpoliert wird.

(ii) Weisen Sie nach: $d_k(f) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_{k+Ns}(f)$. (Hinweis: $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikt}$ gleichmäßig in t.)

(iii) Benutzen Sie (ii), um zu zeigen, dass $||f - P_N||_\infty \leq 2\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k(f)|$. Folgern Sie, dass P_N für $n \to \infty$ gleichmässig gegen f konvergiert. Welche Konvergenzrate können Sie beweisen?

(iv) Seien die Funktionen $f_1(t) = e^{\sin(t)}$ und $f_2(t) = \sin(10t)$ gegeben. Für $n = 2, 3, \dots, 20$ und $i = 1, 2$ berechnen Sie das Interpolationspolynom P_N zu f_i und approximieren den Fehler $||P_N - f_i||_\infty = \max_{t\in[-\pi,\pi]} |P_N(t) - f_i(t)|$ numerisch. Plotten Sie den Fehler mit `semilogy` gegen n. Wie passen die Ergebnisse zu den theoretischen Resultaten aus (iii)?

Aufgabe 26:

Betrachtet wird die *Rechtecksumme* auf $[0, 2\pi)$

$$Q(f) = \frac{2\pi}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi m}{N}\right), \qquad N \in \mathbb{N}$$

zur Integration 2π-periodischer Funktionen f

(i) Zeigen Sie, dass im Falle $f \in C^r(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $r \geq 2$, das Restglied R_N der Abschätzung $|R_N(f)| = \mathcal{O}(N^{-r})$ genügt. Im Fall $r = \infty$ fällt der Integrationsfehler also schneller als jede Potenz von $1/N$. (Tip: Wenden Sie Q auf die Fourierreihendarstellung von f an und benutzen Sie Resultate aus der Vorlesung.)

(ii) Welches Konvergenzverhalten erwarten Sie für die Trapezsumme auf $[0, 2\pi]$?

(iii) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Rechtecksumme für die 2π periodische Fortsetzung der Funktionen auf $[0, 2\pi]$

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = x(2\pi - x)$$
$$f_3(x) = x^2(2\pi - x)^2, \qquad f_4(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$$

Geben Sie dazu die Funktionen

$$E_i(h) = \sup\{|R_N(f_i)| : N \geq 2\pi/h\}, \qquad i = 1, \dots, 4$$

in einem `loglog`-plot aus.