Arbeitsblatt Verkehrsflussmodell

Wir betrachten $\mathbb{R}$ als eine unendlich lange Einbahnstraße ohne Ein- und Ausfahrt und ohne Überholmöglichkeit. Die Anzahl der Fahrzeuge in einem Streckenabschnitt $I \subset \mathbb{R}$ zur Zeit t ist durch

$$A(I) = \int_I u(t,x)dx$$

gegeben, wobei u Verkehrsdichte genannt wird. Wenn die Fahrzeuge an der Position $x \in \mathbb{R}$ zur Zeit t mit Geschwindigkeit $v(t,x)$ fahren, dann lautet die Entwicklungsgleichung für u

$$\partial_t u(t,x) + \partial_x \left(v(t,x)u(t,x)\right) = 0. \tag{1}$$

> a) Leiten Sie (1) durch ein Erhaltungsargument her, indem Sie die zeitliche Änderung von $A(I(t))$ für beliebige Intervalle $I(t)$ betrachten, deren Grenzen sich mit den dortigen Fahrzeugen mitbewegen.

In der Realität orientieren sich Autofahrer mit ihrer gewählten Geschwindigkeit an der lokalen Verkehrsdichte. Als einfacher qualitativ sinnvoller Zusammenhang wählen wir

$$v(t,x) = v_{max}\left(1 - \frac{u(t,x)}{u_{max}}\right).$$

Duch $v_{max} = 1$, $u_{max} = 1$ legen wir natürliche Einheiten für die Geschwindigkeit und die Verkehrsdichte fest und erhalten damit für die Fahrzeuggeschwindigkeit

$$v(t,x) = 1 - u(t,x). \tag{2}$$

> b) Schreiben Sie Gleichung (1) mit Zusammenhang (2) in der Form
>
> $$\partial_t u(t,x) + \partial_x Q(u(t,x)) = 0. \tag{3}$$
>
> Die Funktion Q wird Verkehrsfluss genannt. Was genau beschreibt die Zahl $Q(t,x)$ anschaulich? Bestimmen Sie die Verkehrsdichte, bei der der Verkehrsfluss maximal ist. Wie groß ist in dieser Situation die Geschwindigkeit?

Die Situation konstanter Verkehrsdichte $u(t,x) = \bar{u}$ ist offensichtlich eine Lösung von (3).

c) Leiten Sie für die Störungssituation $u(t,x) = u + \epsilon v(t,x)$ mit kleinem $\epsilon > 0$ eine lineare Gleichung ab, die durch v approximativ erfüllt wird. Betrachten Sie Lösungen für den Fall einer niedrigen und einer hohen Verkehrsdichte $\bar{u}$. Sehen Sie, warum man $a = Q'$ Wellengeschwindigkeit nennt?

Im Folgenden betrachten wir den schwachen Lösungsbegriff in einer fast noch klassischen Situation.

d) Sei u eine stetige und stückweise glatte schwache Lösung von (3) mit endlich vielen Knickstellen $s(t)$, an denen $x \mapsto u(t,x)$ unterschiedliche rechts- und linksseitige Ableitungen besitzt. Zeigen Sie durch Benutzung geeigneter Testfunktionen, dass u in den glatten Bereichen Gleichung (3) im klassischen Sinne erfüllt und dass sich jede Knickstelle $s(t)$ gemäß $s'(t) = a(u(t,s(t)))$ bewegt. Was ist mit der Entropiebedingung?

Für den folgenden Aufgabenteil brauchen Sie die Charakteristikenmethode zur Lösung von skalaren Gleichungen erster Ordnung.

e) Zeigen Sie, dass die schwache Lösung zu einem stetigem stückweise linearen Anfangswert u_0 bis zum möglichen Auftreten von Unstetigkeiten stückweise linear bleibt und dass es genügt, nur die Knickstellen $s_i(t)$ zu verfolgen, da dort die Lösungswerte $u(t, s_i(t)) = u_0(s_i(0))$ erfüllen.

Mit dem Ergebnis aus dem letzten Aufgabenteil können Sie nun einige klassische Verkehrssituationen untersuchen.

f) Ermitteln Sie den Lösungsverlauf für folgende Startsituationen u_0, in dem Sie für einige Zeitpunkte $x \mapsto u(t,x)$ skizzieren.

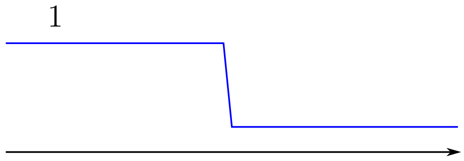

Abbildung 1: Stauauflösung

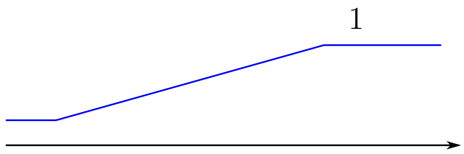

Abbildung 2: Stauwachstum

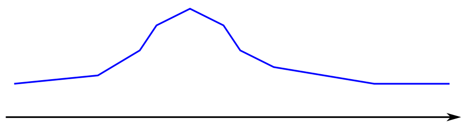

Abbildung 3: lokale Verdichtung

Während sich Strukturen der Verkehrsdichte (wie z.B. die Knickstellen) mit der loalen Wellengeschwindigkeit bewegen, haben die einzelnen Fahrzeuge ganz andere Geschwindigkeiten. Darum geht es im folgenden Aufgabenteil.

g) Berechnen Sie die Beschleunigung eines einzelnen Fahrzeugs, das in einen wachsenden Stau (steile Flanke) hineinfährt.

Die in (g) berechneten abrupten Bremsvorgänge treten zwar auf (Vorsicht, das Stauende befindet sich in einer Kurve), aber normalerweise sehen die Fahrer, dass der Verkehr vor ihnen deutlich dichter wird und bremsen deshalb schon etwas früher. Ein sinnvolleres Modell für die Fahrzeuggeschwindigkeit is daher z.B.

$$v(t,x) = 1 - u(t,x) - \alpha \frac{\partial_x u(t,x)}{u(t,x)}, \qquad \alpha > 0. \tag{4}$$

Wenn die Verkehrsdichte in Fahrtrichtung anwächst ($\partial_x u > 0$) wird eine niedrigere Geschwindigkeit gewählt, wobei wegen u im Nenner bei sehr geringer Verkehrsdichte die Dichteschwankungen stärker auf die Geschwindigkeit wirken als bei höheren Dichten.

h) Welche Gleichung ergibt sich mit Geschwindigkeitsmodell (4)? Für welches Fahrerverhalten würde das scheinbar ähnliche Modell

$$v(t,x) = 1 - u(t,x) + \alpha \frac{\partial_x u(t,x)}{u(t,x)}, \qquad \alpha > 0$$

stehen? Sei nun u_α die glatte Lösung der Verkehrsflussgleichung mit Geschwindigkeitsmodell (4) und sei η eine zweimal stetig differenzierbare konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass wenn u_α für $\alpha \to 0$ gleichmäßig beschränkt bleibt und fast überall gegen eine Funktion u konvergiert, dass dann im schwachen Sinne für die Grenzfunktion u gilt

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x \psi_Q(x) \leq 0,$$

mit einem Entropiefluss ψ_Q, der $\psi_Q' = \eta' Q'$ erfüllt, d.h. genauer, dass für jede nichtnegative Testfunktion $\phi \in C_0^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R})$ gilt

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \eta(u)\partial_t \phi + \psi_Q(u)\partial_x \phi \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u(0,x))\phi(0,x)\, dx \geq 0.$$