Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 08. 11. 2011

Abgabe : 18. 11. 2011

Zimmer : G414

Übungen zur Numerik hyper. Gl & kinet. Meth.

Blatt 02

Aufgabe 1:

Betrachten Sie den folgenden Algorithmus

$$x(n+1) = x(n) + hx^2(n), \qquad x(0) = \frac{1}{2},$$

wobei h die Schrittweite ist. n bezeichnet die Gitter-Punkte mit $0 \leq n \leq N-1$ und $Nh = 1$.

a) Programmieren Sie den Algorithmus und zeichnen Sie $(nh, x(n))$ für verschiedene Werte von h.

b) Analysieren Sie den Algorithmus mit dem gewöhnlichen asymptotischen Ansatz

$$x(n) = x_0(nh) + hx_1(nh) + h^2x_2(nh) + \dots.$$

Finden Sie die Koeffizenten x_0, x_1, $x_2, \dots$ heraus.

c) Zeichnen Sie für ein (nicht zu kleines) h:

$$\begin{aligned}
&(nh, x(n))\\
&(nh, x_0(nh))\\
&(nh, x_0(nh) + hx_1(nh))\\
&(nh, x_0(nh) + hx_1(nh) + h^2x_2(nh))
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Wir betrachten ein Gebiet $[0, T] \times [0, 1]$ mit den Gitter-Punkten

$$\begin{aligned}
&t_n = nh^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots\\
&x_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, M, \qquad \text{mit } Mh = 1.
\end{aligned}$$

Weiter führen wir einen Algorithmus ein,

$$f_i(n+1, j+c_i) = f_i(n, j) + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq}(n, j) - f_i(n, j)), \quad i = 1, 2, 3$$

wobei τ ein Konstante ist und

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = 1.$$

Die Funktion f_i^{eq} wird definiert durch

$$f_i^{eq}(n, j) = w_i\rho(n, j)$$

mit

$$\rho(n, j) = \sum_{i=1}^{3} f_i(n, j) \tag{1}$$

und

$$w_1 = 1 - 2b, \quad w_2 = w_3 = b,$$

b ist ein Konstante in $(0, \frac{1}{2})$. Schließlich seien die Anfangswerte

$$f_i(0, j) = \sin(2\pi x_j) w_i,$$

gegeben und die periodischen Randbedingungen

$$f_3(n, 1) = f_3(n, M), \ f_2(n, M) = f_2(n, 1).$$

a) Programmieren Sie den Algorithmus und zeichnen Sie $(x_j, \rho(n, j))$ für verschiedene t_n.

b) Bestimmen Sie die erste drei Koeffizenten der asymptotischen Entwicklung

$$f_i(n, j) = f_i^{(0)}(t_n, x_j) + h f_i^{(1)}(t_n, x_j) + h^2 f_i^{(2)}(t_n, x_j) + \ldots, \quad i = 1, 2, 3.$$

c) Nach der Definition (1) hat ρ eine änliche Entwicklung

$$\rho(n, j) = \rho^{(0)}(t_n, x_j) + h\rho^{(1)}(t_n, x_j) + h^2 \rho^{(2)}(t_n, x_j) + \ldots.$$

Bestimmen Sie die Differentialgleichungen für $\rho^{(0)}$, $\rho^{(1)}$ bzw. ihre Anfangswerte und Randbedingungen.