Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 09. 01. 2012

Abgabe : 15. 01. 2012
Zimmer : G414

Übungen zur Numerik hyper. Gl & kinet. Meth.

Blatt 04

Ein möglichst einfaches Differenzen-Verfahren zweiter Ordnung für hyperboliche Gleichungen ist von Nessyahu-Tadmor als Erweiterung des gestaffelten Lax-Friedrichs-Verfahren hergeleitet werden (NT Verfahren). Die Konzeptskizze wird zunächst für den Fall des skalaren Anfangswertproblems gegeben (Herleitung siehe Material im Internet)

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad u(0,x) = u_0(x). \tag{1}$$

Der Gitter ist gleichmäßig mit Zeitschritten $\triangle t$ und Raumweiten $\triangle x$. Die folgenden Bezeichnungen treten im NT Verfahren auf:

$$\begin{aligned} t_n &= n\triangle t, \quad t_{n+1/2} = t_n + \frac{1}{2}\triangle t, \\ x_i &= i\triangle x, \quad x_{i+1/2} = x_i + \frac{1}{2}\triangle x, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} u_i^n &= \frac{1}{\triangle x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(t_n,x)dx, \\ u_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{\triangle x}\int_{x_i}^{x_{i+1}} u(t_{n+1},x)dx. \end{aligned} \tag{3}$$

Bereitgestellt sei u_i^n, gesucht wird nach einen Methode zweiter Ordnung für $u_{i+1/2}^{n+1}$.

Integration der Gleichung (1) über das Gebiet $[x_i, x_{i+1}] \times [t_n, t_{n+1}]$ liefert

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} u(t_{n+1},x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(t_n,x)dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(u(t,x_{i+1})) - f(u(t,x_i))]dt. \tag{4}$$

Weiter wird vorausgesetzt, dass u eine lineare Gestalt hat

$$\hat{u}(t_n,x) = u_i^n + (x - x_i)s_i, \quad x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]. \tag{5}$$

Wir setzen $\hat{u}$ in Gleichung (4) und erhalten

$$\begin{aligned} u_{i+1/2}^{n+1} =& \frac{1}{\triangle x}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \hat{u}(t_n,x)dx - \frac{1}{\triangle x}\int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(\hat{u}(t,x_{i+1})) - f(\hat{u}(t,x_i))]dt \\ =& \frac{1}{2}(u_i^n + u_{i+1}^n) + \frac{\triangle x}{8}(s_i - s_{i+1}) - \frac{1}{\triangle x}\int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(\hat{u}(t,x_{i+1})) - f(\hat{u}(t,x_i))]dt \end{aligned} \tag{6}$$

Da die Genauigkeit in zweiter Ordnung gefordert ist, ist es ausreichend, das Fluss-Integral durch Mittelwerte anzunähern,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\hat{u}(t,x_i)dt \approx \triangle t f(\hat{u}(t_n + \frac{1}{2}\triangle t, x_i)), \tag{7}$$

wobei $\hat{u}(t_n + \frac{1}{2}\triangle t, x_i)$ extrapoliert wird anhand der Taylorentwickelung in der Zeit

$$\hat{u}(t_n + \frac{1}{2}\triangle t, x_i) \approx \hat{u}(t_n, x_i) - \frac{\triangle t}{2}\partial_x f(\hat{u}(t_n, x_i)) \approx u_i^n - \frac{\triangle t}{2}\sigma_i. \tag{8}$$

Zur Erstellung von s_i und σ_i, benutzen wir die sogenannten Limiterfunktionen

$$\Phi(a,b) = \phi\left(\frac{b}{a}\right)a, \tag{9}$$

z.B.

$$\begin{aligned} &\text{Minmod Limiter} \quad \phi(r) = \max[0, \min(1,r)], \\ &\text{Superbee Limiter} \quad \phi(r) = \max[0, \min(2r,1), \min(r,2)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Zusammenfassend erscheint das NT Verfahren von u_i^n nach $u_{i+1/2}^{n+1}$ folgendermaßen,

$$\begin{aligned} s_i &= \Phi(u_i^n - u_{i-1}^n, u_{i+1}^n - u_i^n), \\ \sigma_i &= \Phi(f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n), f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)), \\ u_i^{n+1/2} &= u_i^n - \frac{\lambda}{2}\sigma_i, \quad \lambda = \frac{\triangle t}{\triangle x}, \\ g_i^n &= f(u_i^{n+1/2}) + \frac{1}{8\lambda}s_i, \\ u_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_i^n + u_{i+1}^n) - \lambda(g_{i+1}^n - g_i^n). \end{aligned} \tag{11}$$

Für den Schritt von $u_{i+1/2}^n$ nach u_i^{n+1} ersetze man u_i^n durch $u_{i+1/2}^n$ in (11). Die beiden Prozesse wechseln sich ab (gestaffeltes Verfahren).

Aufgabe 1: Verwenden Sie den oben angegebenen Algorithmus und das Lax-Friedrich Verfahren von Blatt 03 zur Lösung der Burgers Gleichung, nämlich,

$$f(u) = \frac{1}{2}u^2, \quad u_0(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \\ 0 & x > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Vergleichen Sie die numerischen Lösungen zu dem Zeitpunkten $t = 0.2, 0.4$.

Ferner erweitern wir das NT Verfahren auf Systeme aus im eindimensionalem Fall. Nun ist

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2, \ldots, u_N), \\ f(u) &= (f_1(u), f_2(u), \ldots, f_N(u)) \end{aligned} \tag{13}$$

und der Fluss-Vektor $f(u)$ besizt eine $N \times N$ Jacobic Matrix A mit $A_{ij}(u) = \frac{\partial f_i(u)}{\partial u_j}$. Die numerische Lösung wird bezeichnet durch dem Vektor

$$U_i^n = (u_{1,i}^n, u_{2,i}^n, \ldots, u_{N,i}^n)^T. \tag{14}$$

Jetzt werden s_i und σ_i auch Vektoren, d.h.

$$\begin{aligned} s_i &= (s_{1,i}, s_{2,i}, \ldots, s_{N,i}), \\ \sigma_i &= (\sigma_{1,i}, \sigma_{2,i}, \ldots, \sigma_{N,i})^T, \end{aligned} \tag{15}$$

die komponentenweise wieder durch Limiter-Funktionen ausgerechnet werden. Mit Hilfe der Notation $\triangle u_{k,i+1/2} = u_{k,i+1} - u_{k,i}$ nehmen wir

$$s_{k,i} = \text{MinMod}(\theta \triangle u_{k,i+1/2}^n, \theta \triangle u_{k,i-1/2}^n, \frac{1}{2}(u_{k,i+1}^n - u_{k,i-1}^n)), \qquad \theta \in [1,2], \quad k = 1,2,\ldots,N. \tag{16}$$

Hier sei MinMod die verallgemeinerte Minmod Funktion definiert durch

$$\text{MinMod}(z_1, z_2, ...) = \begin{cases} \min_j(z_j), & \text{wenn alle } z_j > 0, \\ \max_j(z_j), & \text{wenn alle } z_j < 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{17}$$

Eine mögliche Wahl von σ_i ergibt sich durch

$$\sigma_i = A(U_i)s_i. \tag{18}$$

Die weitere Schritten des NT Verfahren für eindimensionale Systeme lauten:

$$\begin{aligned} U_i^{n+1/2} &= U_i^n - \frac{\lambda}{2}\sigma_i, \\ G_i^n &= f(U_i^{n+1/2}) + \frac{1}{8\lambda}s_i, \\ U_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{2}(U_i^n + U_{i+1}^n) - \lambda(G_{i+1}^n - G_i^n). \end{aligned} \tag{19}$$

Aufgabe 2: Verwenden Sie Algorithmus (19) zur Lösung des Euler Systems mit

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ E \end{pmatrix}, \quad f(u) = \begin{pmatrix} m \\ \rho u^2 + p \\ u(E+p) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

wobei

$$m = \rho u, \quad p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2), \quad \gamma = 1.4. \tag{21}$$

Die Anfangswerte seien vorgegeben durch

$$u_0(x) = \begin{cases} (1, 0, \frac{5}{2})^T, & x < 0, \\ (\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{4}), & x > 0. \end{cases} \tag{22}$$

Berechnen Sie die numerischen Lösungen zum Zeitpunkt $T = 0.1644$ (Zum Vergleich siehe Material im Internet).