Universität Konstanz *WS 11/12*
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Volkwein, O. Lass

Übungen zu **Modellreduktion mit Proper Orthogonal Decomposition**

http://www.math.uni-konstanz.de/numerik/personen/volkwein/teaching/

Blatt 1 **Abgabe: 04.11.2011, 10:00 Uhr**

Aufgabe 1 (Hausaufgabe) (2 Punkte)

Zeige, dass die Frobenius Norm eine Matrixnorm ist und dass

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F \quad \text{für alle } A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

gilt. Weiter sei $U \in \mathbb{R}^{m\times d}$ eine Matrix mit paarweise zueinander orthonormalen Vektoren $u_i \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq i \leq d$. Zeige, dass

$$\|UA\|_F = \|A\|_F \quad \text{für jede Matrix } A \in \mathbb{R}^{d\times n}$$

gilt.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{y}(x,t) &= \Delta y(x,t) + f(x,t), && \text{in} \quad \Omega \times (0,T], \\ y(x,t) &= g(x), && \text{auf} \quad \partial\Omega \times (0,T] \\ y(x,0) &= y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

mit $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ und $T > 0$. Diskretisiere (1) mit Hilfe der Finiten-Differenzenmethode im Ort. Führe (1) über in die Form (2) und gib M, A und $b(t)$ explizit an. Verwende $n+2$ Diskretisierungspunkte in jeder Raumdimension (n innere Punkte).

Aufgabe 3

Wir betrachten folgendes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} M\dot{y}(t) &= Ay(t) + b(t), \quad t \in (0,T], \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei M und A reelle $n \times n$ Matrizen sind mit $M = M^\top$, $A = A^\top$, M positiv definit und A negativ semidefinit. Weiter sei $T > 0$ die Endzeit, $b : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Inhomogenität und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ eine gegebene Anfangsbedingung.

a) Formuliere das explizite und implizite Euler Verfahren für (2).

b) Formuliere die Trapezmethode (Crank Nicolson Verfahren) für (2).

c) Sind alle drei Methoden unter den angegebenen Voraussetzungen wohldefiniert?