

ÜBUNGEN ZU Modellreduktion mit Proper Orthogonal Decomposition

<http://www.math.uni-konstanz.de/numerik/personen/volkwein/teaching/>

Blatt 5 **Abgabe: 13.01.2012, 10:00 Uhr**

Aufgabe 13 (Hausaufgabe) (2 Punkte)

Beweise das *Gronwall Lemma*: Für $T > 0$ sei $\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht negative differenzierbare Funktion mit

$$\eta'(t) \leq \varphi(t)\eta(t) + \psi(t) \quad \text{für alle } t \in [0, T],$$

wobei φ und ψ reellwertige, nicht negative, integrierbare Funktionen in $[0, T]$ sind. Dann gilt

$$\eta(t) \leq \exp\left(\int_0^t \varphi(s) ds\right) \left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds\right) \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Speziell, falls

$$\eta' \leq \varphi\eta \quad \text{in } [0, T] \quad \text{und} \quad \eta(0) = 0$$

zeige, dass $\eta = 0$ in $[0, T]$.

Aufgabe 14

Zeige, dass der Operator \mathcal{P}_n^ℓ definiert in (2.18) linear und beschränkt ist. Weiters weise die Eigenschaft $\|\mathcal{P}_n^\ell\|_{L(\mathbb{R}^m)} = 1$ nach.

Aufgabe 15

Wir betrachten das Resultat aus der Vorlesung

$$\lambda_i^n \rightarrow \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq \ell \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

und wollen dieses für die Wärmeleitungsgleichung aus den Programmieraufgaben numerisch überprüfen. Verwende die M-Files aus Programm 2 und führe folgenden Test durch. Wähle verschiedene Werte für n und berechne die ersten vier Eigenwerte und die Spur der Korrelationsmatrix. Die Parameter werden wie folgt gesetzt:

$$n = 5 : 5 : 200, \quad \text{tstep} = 100, \quad \text{method} = \text{'RS'} \quad \text{und} \quad \text{pod} = \text{'eig'}.$$

Für den Diffusionskoeffizienten wählen wir $c = 0.05$ und die Anfangsbedingung ist gegeben durch

$$y_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{in } (0.25, 0.75) \times (0.25, 0.75), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Erzeuge für die Eigenwerte und Spur eine Grafik in semilogarithmischer Skalierung. Wie unterscheiden sich die Resultate für verschiedene Gewichtungsmatrizen ('E', 'L2')? Kann das Resultat aus der Vorlesung bestätigt werden? Interpretiere die Beobachtungen.