Universität Konstanz *WS 11/12*
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Volkwein, O. Lass

Übungen zu **Modellreduktion mit Proper Orthogonal Decomposition**

http://www.math.uni-konstanz.de/numerik/personen/volkwein/teaching/

Blatt 6 **Abgabe: 27.01.2012, 10:00 Uhr**

Aufgabe 16 (Hausaufgabe) (2 Punkte)

Zeige, dass der Operator $\tilde{\mathcal{R}}$ linear, beschränkt, selbstadjungiert und nicht negativ ist wenn $y \in H^1(0,T;\mathbb{R}^m)$, sprich

$$\int_0^T \|y(t)\|_W^2 + \|\dot{y}(t)\|_W^2 \mathrm{d}t < \infty$$

gilt.

Aufgabe 17

Zeige, dass die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung für (2.12) durch $\tilde{\mathcal{R}}\tilde{u}_i = \tilde{\lambda}_i \tilde{u}_i$, $1 \le i \le \ell$ gegeben ist.

Aufgabe 18

Gegeben ist die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \theta_t(t,x) &= \theta_{xx}(t,x) + u(t)\chi(x), && \text{in} \quad (0,T] \times \Omega, \\ \theta(t,x) &= 0, && \text{auf} \quad (0,T] \times \partial\Omega, \\ \theta(0,x) &= \theta_0, \end{aligned} \tag{1}$$

mit $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ und $T > 0$. Weiters beschreibt $u(t)$ eine Steuerung und $\chi(x)$ eine *Shape Funktion*.

1. Diskretisiere (1) mit Hilfe der Finiten-Differenzenmethode im Ort. Schreibe (1) in der Form $\dot{\theta}(t) = A\theta(t) + Bu(t)$ (vergleiche **Aufgabe 2**).

2. Unter Verwendung der Trapezmethode diskretisiere das Zielfunktional

$$J(\theta,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\theta(T,x) - \theta_T(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\kappa}{2}\int_0^T |u(t)|^2 \,\mathrm{d}t, \tag{2}$$

   mit $\theta_T(x)$ einem gewünschtem Endzustand und $\kappa > 0$ einem Regularisierungsparameter (vergleiche **Aufgabe 9**).

3. Formuliere die *Matrix Riccati Gleichung* für das diskretisierte Zielfunktional (2) und die diskretisierte Wärmeleitungsgleichung (1).