Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

Dr. E. Luik

20. Juli 2018

Klausur zu **Computereinsatz in der Mathematik**

Name	**Vorname**	**Matrikel-Nr.**	**Studiengang**

Allgemeine Richtlinien:

1. Diese Klausur beinhaltet **sechs** verschiedene Aufgaben (Rückseite beachten). Kontrollieren Sie Ihr Exemplar, ein Austauschexemplar kann Ihnen sofort ausgehändigt werden.
2. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
3. Schreiben Sie Ihre Matrikelnummer auf dieses Deckblatt und auf jedes einzelne Blatt. Die Angabe des Names erfolgt freiwillig.
4. Schreiben Sie **mit Tinte oder Kugelschreiber**.
5. **Zugelassene Hilfsmittel:** Vorher abgegebener Spickzettel (1 Seite DIN A 4), welcher dieser Klausur beiliegt. Alle anderen Hilfsmittel sind verboten und führen zum Ausschluss von der Klausur.
6. Die Klausur dauert **60 Minuten**.
7. Zum Bestehen sind mindestens 15 Punkte erforderlich.

Viel Erfolg!

Korrektur

	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6	gesamt	Note
Punkte	6	5	4	8	4	4	31	-
erreicht								

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Erstellen Sie ein Latex-Programm (ohne Präambel), das den folgenden Ausdruck erzeugt. Die Nummerierung und das Referieren soll automatisch erfolgen.

Ein **explizites Runge-Kutta-Verfahren** zur numerischen Lösung der autonomen Anfangswertaufgabe

$$\dot{x} = F(x),\ x(t_0) = y^{(0)}\ \ (F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n). \tag{1}$$

wird durch eine **Verfahrensmatrix**

$$\left(\begin{array}{ccccc} \beta_{21} & & & & \\ \beta_{31} & \beta_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \beta_{s1} & \beta_{s2} & \cdots & \beta_{s,s-1} & \\ \hline \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{s-1} & \gamma_s \end{array}\right) \tag{2}$$

beschrieben. Die Matrix in (2) definiert folgendes Verfahren:

$$\begin{array}{rcl} K^{(1)}(h,x) & = & F(x) \\ K^{(2)}(h,x) & = & F\left(x + h\beta_{21}K^{(1)}(h,x)\right) \\ & \vdots & \\ K^{(s)}(h,x) & = & F\left(x + \sum_{i=1}^{s-1} h\beta_{si}K^{(i)}(h,x)\right) \end{array}$$

Daraus bildet man die sogenannte **Verfahrensfunktion**

$$V(h,x) = \sum_{j=1}^{s} \gamma_j K^{(j)}(h,x)$$

Aufgabe 2: (5 Punkte)

a) Welche Ergebnisse (auf dem Bildschirm) liefern die folgenden **Matlab**-Befehle?

```
A = 3.*eye(4,4) - diag(10:10:30,-1)
B = ([1 3 3; 0 2 1; 4 4 3].^2 < 9.*ones(3,3))
C = sqrt(sqrt([16 1 81 256]))
```

b) Schreiben Sie ein **Matlab**-Programm, welches 50 im Intervall $[-3, 3]$ gleichverteilte Zufallszahlen erzeugt und in übersichtlicher Form (4 Stellen nach dem Komma) in die Datei `Zufall.dat` schreibt.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

a) Erstellen Sie eine **Matlab-Funktion** `p(x,n,x0)` zur Berechnung von

$$p(x,n,x_0) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{x_0}(x-x_0)^k}{k!} \qquad (x, x_0 \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

b) Schreiben Sie ein **Matlab**-Programm, welches für $x_0 = 1$ und $n = 2, 3, 4$ im Intervall $[-1, 3]$ die Funktionen $p(x, n, x_0)$ mit verschiedenen Farben in ein Schaubild zeichnet (unter Verwendung der Matlab-Funktion aus a)).
Das Schaubild soll die Überschrift *Taylor-Polynome zur Exponentialfunktion* erhalten.

bitte wenden

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Es sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $g(a)g(b) < 0$. Dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in (a,b)$ mit $g(\xi) = 0$, d.h. g hat mindestens eine Nullstelle in (a,b).

a) Erstellen Sie eine **Matlab**-Funktion `function xi = nullstelle(g,a,b,eps)`, welche diese Nullstelle mit dem folgenden Verfahren (*Bisektionsverfahren*) berechnet:

1. Setze $s = \frac{a+b}{2}$ (Intervallmitte).
2. Gilt $g(s) = 0$, so setze `xi` $= s$ und beende das Verfahren.
   Gilt $g(a)g(s) < 0$, so setze $b = s$ (a bleibt unverändert).
   Gilt $g(s)g(b) < 0$, so setze $a = s$ (b bleibt unverändert).
3. Gilt für ein gegebenes `eps` > 0 die Beziehung $|b - a| <$ `eps`, so wird s als Näherungswert akzeptiert (also `xi` $= s$ gesetzt), und das Verfahren wird beendet. Andernfalls gehe wieder zu Schritt 1.

b) Sei nun $f(x) = \exp(x) + x^5 + x^2 - 10$.

(1) Wie viele positive Nullstellen besitzt f (mit Beweis)?

(2) Erstellen Sie ein **Matlab**-Programm, das folgendes leistet:

- über den Bildschirm werden `a, b, eps` eingelesen,
- falls $f(a)f(b) < 0$ gilt, so wird mit der Matlab-Funktion `nullstelle` aus Teil a) eine Nullstelle von f berechnet und auf dem Bildschirm ausgegeben.
- falls $f(a)f(b) \geq 0$ gilt, so wird das Programm abgebrochen mit Fehlermeldung
  `Fehler: f(a)*f(b) >= 0`

Aufgabe 5: (4 Punkte)

a) Rechnen Sie die Zahl $x = 0.2BC \cdot 16^3$ (Hexadezimalsystem) um in die normalisierte Darstellung im Dezimal- und Dualsystem.

b) Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 10x - 5$. Berechnen Sie mit dem Hornerschema $p''(-1)$.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

a) Berechnen Sie mit **Maple**

(1) die Determinante und alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

(2) die Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \prod_{l=1}^{k} \frac{2}{l}$.

b) Welches Ergebnis liefert die folgende **Maple**-Sequenz?

```
h := (x,y) -> exp(x^2 - y^2 - 10)
Diff(h(x,y),y) = diff(h(x,y),y)
```