Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

WS 2018/19

Dr. E. Luik

Übungen zur **Mathematik für Biologen und Sportwissenschaftler**

Freiwillige Zusatzaufgaben zur **Differential- und Integralrechnung**

Lösungen

(1) Bestimmen Sie die 1. Ableitung:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln\left((x+2)^2+3\right) && \Rightarrow\; f'(x) = \tfrac{2x+4}{(x+2)^2+3}\\
f(x) &= \exp\left(-(x+1)^2\right) && \Rightarrow\; f'(x) = -2(x+1)\exp\left(-(x+1)^2\right)\\
f(x) &= (x+1)\ln(x+1) && \Rightarrow\; f'(x) = \ln(x+1)+1\\
f(x) &= \cos^2(x) && \Rightarrow\; f'(x) = -2\cos(x)\sin(x)\\
f(x) &= \sqrt[3]{1+2x} = (1+2x)^{\frac{1}{3}} && \Rightarrow\; f'(x) = \tfrac{2}{3}(1+2x)^{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

(2) Finden Sie eine allgemeine Formel für die n-te Ableitung:

$$f(x) = \frac{1}{\exp(3x)} \quad\Rightarrow\quad f^{(n)}(x) = \frac{(-3)^n}{\exp(3x)}\,,$$

$$g(x) = \frac{1}{1-2x} \quad\Rightarrow\quad g^{(n)}(x) = \frac{2^n n!}{(1-2x)^n}$$

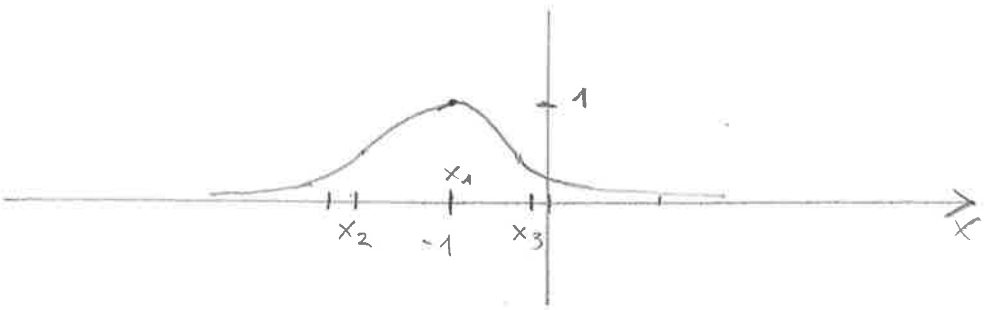
(3) Führen Sie von der Funktion $f(x) = \exp(-(x+1)^2)$ eine qualitative Kurvendiskussion durch.

Wegen $\exp(-(x+1)^2) > 0$ besitzt f keine Nullstellen.

$$\lim_{x\to\infty}\exp(-(x+1)^2) = 0\,, \qquad \lim_{x\to-\infty}\exp(-(x+1)^2) = 0$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -2(x+1)\exp(-(x+1))^2\\
f'(x) &= 0 \Rightarrow x_1 = -1 \text{ (Hochpunkt)}\\
f'(x) &> 0 \text{ für } x < -1 \Rightarrow f \text{ ist streng monoton wachsend}\\
f'(x) &< 0 \text{ für } x > -1 \Rightarrow f \text{ ist streng monoton fallend}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{(2)}(x) &= \left(4(x+1)^2-2\right)\exp(-(x+1)^2)\\
f^{(2)}(x) &= 0 \Rightarrow x_{2,3} = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (Wendepunkte)}\\
f^{(2)}(x) &> 0 \text{ für } x < -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{ Linkskrümmung}\\
f^{(2)}(x) &> 0 \text{ für } x > -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{ Linkskrümmung}\\
f^{(2)}(x) &< 0 \text{ für } -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < x < -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{ Rechtskrümmung}
\end{aligned}$$



(4) Bestimmen Sie die Stammfunktionen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1-2x)^{\frac{3}{2}} & \Rightarrow\quad F(x) &= -\frac{1}{5}(1-2x)^{\frac{5}{2}}\\
f(x) &= 2x\cos\left(x^2+1\right) & \Rightarrow\quad F(x) &= \sin\left(x^2+1\right)\\
f(x) &= \sin(\pi x+3) & \Rightarrow\quad F(x) &= -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x+3)\\
f(x) &= \cos^3(5x)+\cos(5x)\sin^2(5x) & \Rightarrow\quad F(x) &= \frac{1}{5}\sin(5x)\\
f(x) &= \exp(2+3x)\exp(2x-1) & \Rightarrow\quad F(x) &= \frac{1}{5}\exp(1+5x)\\
f(x) &= \frac{1}{(3+2x)^3} & \Rightarrow\quad F(x) &= -\frac{1}{4(3+2x)^2}
\end{aligned}
$$

(5)

$$3\int_0^{\pi/2}\left(\cos(\varphi)+2\cos(\varphi)\cdot\sin^2(\varphi)\right)\,d\varphi \quad=\quad 5$$

$$\int_1^4 -\frac{1}{3-4t}dt \quad=\quad \frac{\ln(13)}{4}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{4-4\eta+\eta^2}\,d\eta \quad=\quad \frac{2}{3}$$

(6)

$$\int\frac{2+3x}{4-9x^2}\,dx \quad=\quad -\frac{\ln(|2-3x|)}{3}+c$$

$$\int\frac{1+\exp(4x)}{\exp(3x)}\,dx \quad=\quad -\frac{1}{3\exp(3x)}+\exp(x)+c$$

$$\int x^2\sin(x^3)\,dx \quad=\quad -\frac{\cos(x^3)}{3}+c$$

(7)

$$\int_1^2\frac{1}{x^2-x-2}\,dx \quad=\quad -\frac{2}{3}\ln(2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos(x)\,dx \quad=\quad -4\pi$$

$$\int\frac{2x^2-14x+18}{x^2-7x+12}\,dx \quad=\quad 2x+6\ln\left(\left|\frac{x-3}{x-4}\right|\right)+c$$