

Übungen zur **Mathematik für Biologen und Sportwissenschaftler**Freiwillige Zusatzaufgaben zur **Differentialrechnung im Mehrdimensionalen**

- (1) Bestimmen Sie Gradient $\nabla h(u, v)$ und Hesse-Matrix $\text{Hess } h(u, v)$ von $h(u, v) = \sin(u^2 + v^2)$.
- (2) Es sei $h(x, y) = \sqrt{9 - (2x - y)^2}$.
- Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich \mathbb{D} von h und skizzieren Sie diesen. Geben Sie den Wertebereich \mathbb{W} von h an.
 - Ist h injektiv (mit Begründung)?
 - Berechnen Sie den Gradienten von h .
 - Bestimmen Sie die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{D} : h_x(x, y) = 0\} .$$

Zeichnen Sie diese Menge in das Schaubild von a).

- (3) Bestimmen Sie zu $f(x) = \sin(x)$ das Taylor-Polynom 1. und 2. Grades an der Stelle $\bar{x} = 0$.
- (4) Berechnen Sie zu $g(x) = \cos(2x)$ das Taylor-Polynom vom Grad 2 an der Stelle $\bar{x} = \frac{\pi}{2}$.
- (5) Gegeben sei die Funktion $h(x, y) = \exp((x - y)^2)$.
- Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich von h .
 - Skizzieren Sie die Höhenlinie H_c zum Niveau $c = 1$.
 - Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von h .
 - Bestimmen Sie das Taylor-Polynom vom Grad 1 an der Stelle $(1, 2)$ zu $h(x, y)$.
- (6) **a)** Gegeben seien zwei reelle Größen u, v mit $dv = du$. Folgt dann $v = u$ durchweg?
- b)** Es gelte nun $dv = 2u \cdot du$. Eine Messung ergibt $u = 5, v = 27$. Wie lautet der Zusammenhang zwischen u und v ?

- (7) Die van-der-Waalsche Zustandsgleichung lautet

$$P(V, T) = \frac{R \cdot T}{V - b} - \frac{a}{V^2} \quad \text{mit positiven Konstanten } a, b \text{ und } R.$$

Bestimmen Sie das totale Differential bei $(V, T) = (2, 6)$.