Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

WS 2018/19

Dr. E. Luik

Übungen zur **Mathematik für Biologen und Sportwissenschaftler**

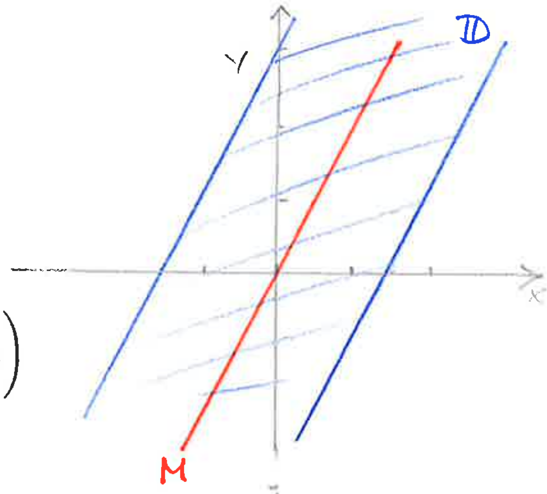
Freiwillige Zusatzaufgaben zur **Differentialrechnung im Mehrdimensionalen**

Lösungen

(1)

$$\nabla h(u,v) = \big(2u\cos(u^2+v^2)\,,\ 2v\cos(u^2+v^2)\big)\ ,$$

$$\operatorname{Hess} h(u,v) = \begin{pmatrix} 2\cos(u^2+v^2) - 4u^2\sin(u^2+v^2) & -4uv\,\sin(u^2+v^2) \\ -4uv\,\sin(u^2+v^2) & 2\cos(u^2+v^2) - 4v^2\sin(u^2+v^2) \end{pmatrix}$$



(2) **a)** $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in \mathbb{R},\ \ 2x-3 \le y \le 2x+3\}$
$\mathbb{W} = [0,3]$

b) h ist nicht injektiv,da z.B.
$h(0,0) = 3$ und $h(1,2) = \sqrt{9-(2-2)^2} = 3$.

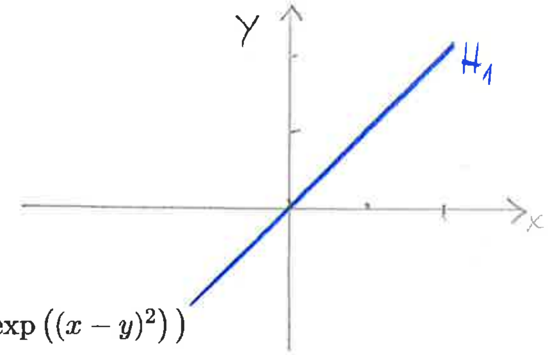
c)

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} h(x,y) &= (h_x(x,y), h_y(x,y)) \\ &= \left(-\frac{2(2x-y)}{\sqrt{9-(2x-y)^2}}\,,\ \frac{2x-y}{\sqrt{9-(2x-y)^2}}\right) \end{aligned}$$

d) $M\ =\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \in \mathbb{R},\ y = 2x\}$

(3) $p_1(x) = x$ und $p_2(x) = x$.

(4) $p_2(x) = -1 + 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$.



(5) **a)** $\mathbb{D} = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{W} = [1,\infty)$.

b) $H_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ y = x,\ x \in \mathbb{R}\}$

c)

$$\operatorname{grad} h(x,y)\ =\ \big(2(x-y)\exp\left((x-y)^2\right)\,,\ -2(x-y)\exp\left((x-y)^2\right)\big)$$

$$\operatorname{Hess} h(x,y) = \begin{pmatrix} \left[2+4(x-y)^2\right]\exp\left((x-y)^2\right) & \left[-2-4(x-y)^2\right]\exp\left((x-y)^2\right) \\ \left[-2-4(x-y)^2\right]\exp\left((x-y)^2\right) & \left[2+4(x-y)^2\right]\exp\left((x-y)^2\right) \end{pmatrix}$$

d) $p(x,y)\ =\ e - 2e(x-1) + 2e(y-2)$.

(6) **a)** Nein. Der Zusammenhang lautet $v = u + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

b) $v(u) = u^2 + 2$

(7)

$$dP\ =\ \left(-\frac{6R}{(2-b)^2} + \frac{2a}{8}\right)dV\ +\ \frac{R}{2-b}dT$$