



## Mathematik II

für die Studiengänge **Chemie, Life Science und Nanoscience**

### Freiwillige Zusatzaufgaben zu Dgl-Systemen

(1) Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -8 & -6 & 8 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ .

- a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von  $A$  und die zugehörigen Eigenräume.
- b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix  $D$  und eine invertierbare Matrix  $T$  mit  $D = T^{-1}AT$ .
- c) Lösen Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1, & x_1(0) &= -1 \\ \dot{x}_2 &= -8x_1 - 6x_2 + 8x_3, & x_2(0) &= 5 \\ \dot{x}_3 &= -4x_1 - 4x_2 + 6x_3, & x_3(0) &= 1 \end{aligned}$$

(2) Berechnen Sie die Lösung von

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x + 2y, & x(0) &= 1 \\ \dot{y} &= 2x - 3y, & y(0) &= 5 \end{aligned}$$

(3) Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ .

- a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von  $A$  und die zugehörigen Eigenräume.
- b) Ermitteln Sie alle Lösungen von

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

(4) Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

- a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von  $A$  und die zugehörigen Eigenräume.
- b) Finden Sie eine unitäre Matrix  $U$  und eine Diagonalmatrix  $D$  mit  $D = U^+AU$ .
- c) Bestimmen Sie die Spektraldarstellung von  $e^{At}$ .
- d) Lösen Sie das Dgl-System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + 3y, & \dot{x}(0) &= 2 \\ \dot{y} &= 3x + 2y, & \dot{y}(0) &= 1 \end{aligned}$$