Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

SS 2019

Dr. E. Luik

Mathematik II

für die Studiengänge **Chemie, Life Science und Nanoscience**

Freiwillige Zusatzaufgaben zu **Eigenwerten und Eigenvektoren**

(1) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie

a) das charakteristische Polynom von A,

b) alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume,

c) die Werte von α, für die A diagonalisierbar ist.

(2) Es seien $p(t) = 2 + t^2,\ f(t) = e^t$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $p(A)$ und $f(A)$.

(3) Die 4×4 - Matrix A habe die Eigenwerte

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2},\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = 4\ .$$

a) Ist A invertierbar? Falls ja, welche Eigenwerte hat A^{-1}?

b) Ist A diagonalisierbar (mit Begründung)?

(4) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenräume.

b) Finden Sie eine unitäre Matrix U und eine Diagonalmatrix D mit $D = U^+ AU$.

(5) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\vec{c}$ ein Eigenvektor von A ist und bestimmen Sie den dazugehörigen Eigenwert.

b) Zeigen Sie, dass $\lambda = -3$ ein weiterer Eigenwert von A ist. Bestimmen Sie den dazugehörigen Eigenraum $E = \mathrm{eig}(A, -3)$ und die Matrix P, die den $\mathbb{R}^3$ darauf projiziert.

c) Ist A invertierbar? Falls ja, so berechnen Sie die Matrix A^{-1}. Falls nein, zeigen Sie, dass 0 ein weiterer Eigenwert von A ist und bestimmen Sie den dazugehörigen Eigenraum.

d) Ist A normal. Falls ja, bestimmen Sie die Spektraldarstellung von A.

(6) Es sei

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad .$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenräume.

b) Geben Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an.

c) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix T mit der Eigenschaft

$$D \;=\; T^{-1}\, A\, T \quad .$$

d) Ist A normal? Falls ja, so bestimmen Sie eine unitäre Matrix U und eine Diagonalmatrix D mit

$$D \;=\; U^{+}\, A\, U \quad .$$