Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

SS 19

Dr. E. Luik

Mathematik II

für die Studiengänge **Chemie, Life Science und Nanoscience**

Freiwillige Zusatzaufgaben zu **Eigenwerten und Eigenvektoren**

Lösungen

(1) (a) $p_A(t) = (1-t)(t^2-5t+4)$

(b) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ (doppelt) und $\lambda_2 = 4$

$$\operatorname{eig}(A,4) \;=\; \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\operatorname{eig}(A,1) \;=\; \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}, \quad \text{falls } \alpha \neq 1$$

$$\operatorname{eig}(A,1) \;=\; \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad \text{falls } \alpha = 1$$

(c) Nur für $\alpha = 1$ ist A diagonalisierbar, da dann für jeden EW die algebraische und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

(2) $$p(A) = \begin{pmatrix}2&0&1&2\\0&2&0&1\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}, \quad f(A) = \begin{pmatrix}1&1&\frac{3}{2}&\frac{13}{6}\\0&1&1&\frac{3}{2}\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) (a) A ist invertierbar, da alle EW von Null verschieden sind.
A^{-1} hat die EW $2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$.

(b) Die 4×4-Matrix hat 4 verschiedene Eigenwerte. Damit ist die algebraische Vielfacheheit jeweils 1. Wegen geom. V. $\leq$ alg. V. ist die geom. V. auch jeweils eins. Da für jeden EW die geom. und alg. V. übereinstimmen, ist A diagonalisierbar.

(4) a) Eigenwerte: $\lambda_1 = 2+3i,\ \lambda_2 = 2-3i$

$$\operatorname{eig}(A,2+3i) \;=\; \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad \operatorname{eig}(A,2-3i) \;=\; \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

b) $$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2+3i & 0\\ 0 & 2-3i\end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i & -i\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

(5) a) Berechnung von $A\vec{c}$ liefert: $A\vec{c} = 3\vec{c}$. Also ist $\lambda = 3$ eine EW und $\vec{c}$ ein zugehöriger EV.

b) Zeige, dass $(A + 3I)\vec{x} = \vec{0}$ nichttrivale Lösungen besitzt. Dann ist $\lambda = -3$ ein Eigenwert.

$$\mathrm{eig}(A, -3) \; = \; \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}, \quad \text{Projektionsmatrix } P \; = \; \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ besitzt nichttriviale Lösungen. Damit ist A nicht invertierbar und $\lambda = 0$ ein Eigenwert.

$$\mathrm{eig}(A, 0) \; = \; \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

d) A ist symmetrisch und damit auch normal. Die Spektraldarstellung lautet:

$$A \; = \; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

(6)a) Eigenwerte: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = -1.$

$$\mathrm{eig}(A, 2) \; = \; \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathrm{eig}(A, 3) \; = \; \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\mathrm{eig}(A, 1) \; = \; \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathrm{eig}(A, 3) \; = \; \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

b) Alle EW habe jeweils die geom. Vielfachheit 1.

c) $$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) $$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$