



Mathematik II

für die Studiengänge **Chemie, Life Science und Nanoscience**

Freiwillige Zusatzaufgaben zu **Linearen Abbildungen**

(1) Vorgelegt seien die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

und die Basen $\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sowie $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Geben Sie die Matrixdarstellung zu φ an, und zwar bezüglich

- a) \mathcal{N} im Urbild- und im Zielraum,
- b) \mathcal{N} im Urbild- und \mathcal{B} im Zielraum,
- c) \mathcal{B} im Urbild- und \mathcal{N} im Zielraum,
- d) \mathcal{B} im Urbild- und im Zielraum

(2) Es seien D_α und D_β zwei Drehmatrizen im \mathbb{R}^2 . Zeigen Sie, dass das Produkt $D_\alpha D_\beta$ wieder eine Drehmatrix D_γ ist.

(3) Welche Matrixdarstellung A (bezüglich der natürlichen Basis) hat die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, durch die der Raum \mathbb{R}^3 an der Ebene $x = y$ gespiegelt wird?

(4) Es seien $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- a) Welche Matrix S (bzgl. der natürlichen Basis) spiegelt den \mathbb{R}^3 an der von \vec{u} und \vec{v} aufgespannten Ebene?
- b) Welche Matrix P (bzgl. der natürlichen Basis) projiziert den \mathbb{R}^3 auf diese Ebene?

(5) Es sei $G = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. Bestimmen Sie die Projektionsmatrix $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow G$ des \mathbb{R}^3 auf die Gerade G .

Projizieren Sie den Punkt $\vec{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf die Gerade G .

bitte wenden

(6) **a)** Es sei $G = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Welche Matrixdarstellung (bezüglich der natürlichen Basis) hat

die lineare Abbildung φ_G , die den \mathbb{R}^3 auf G projiziert? Projizieren Sie $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf G .

b) Es sei φ die lineare Abbildung, die den \mathbb{R}^3 zuerst an der Ebene $E : x - y + z = 0$ spiegelt und danach auf die Gerade G aus a) projiziert. Welche Matrixdarstellung (bezüglich der natürlichen Basis) besitzt φ ?

(7) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y + z \\ 2x - 2z \\ -4x + 2y - 2z \end{pmatrix} .$$

Ist diese Abbildung regulär? Falls ja, so bestimmen Sie die Umkehrabbildung φ^{-1} .