Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

SS 19

Dr. E. Luik

Mathematik II

für die Studiengänge **Chemie, Life Science und Nanoscience**

Freiwillige Zusatzaufgaben zu **Linearen Abbildungen**

Lösungen

(1) $\varphi \overset{\mathcal{N},\mathcal{N}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\varphi \overset{\mathcal{N},\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$, $\varphi \overset{\mathcal{B},\mathcal{N}}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $\varphi \overset{\mathcal{B},\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

(2) Mit Hilfe der Additionstheoreme für cos und sin folgt

$$D_\alpha\, D_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = D_{\alpha+\beta}$$

Also $\gamma = \alpha + \beta$.

(3) $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) $S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(5) $P = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $P\,\vec{z} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(6) a) Projektionsmatrix $P = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P\,\vec{z} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}$.

(6) b) Spiegelungsmatrix $S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\varphi = \varphi_G \circ \varphi_S$ hat die Matrixdarstellung

$$A = P \cdot S \;=\; \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 8 & 16 & 2 \\ 8 & 16 & 2 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} .$$

(7) φ hat (bezüglich der natürlichen Basen) die Matrixdarstellung:

$$\varphi \overset{\mathcal{N},\mathcal{N}}{=} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} =: A$$

Bringe A auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt A und damit auch φ regulär.

$$\varphi^{-1}(x,\, y,\, z) = \begin{pmatrix} -x - \frac{1}{2}z \\ -3x - \frac{1}{2}y - z \\ -x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \end{pmatrix}$$