



Mathematik II

für die Studiengänge Chemie, Life Science und Nanoscience

Freiwillige Zusatzaufgaben zu Matrizen und Determinanten

Lösungen

$$(1) \quad A^+ = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ -2i & 1-i & 1 \end{pmatrix}, \quad AA^+ = \begin{pmatrix} 7 & 2+3i & 2i \\ 2-3i & 3 & 1+i \\ -2i & 1-i & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} & -i \\ 0 & i & 1-i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \text{ a) } \quad \mathbb{L} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) $\text{rang}(B - 4I) = 3$

c) Es gilt $\det(B) = 0$. Deshalb sind die Spalten von B linear abhängig.

$$(3) \text{ a) } \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \quad \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} t-1 \\ -t-2 \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

c) $p(t) = -t^3 + 12t + 16$

$$(4) \quad \det C = \frac{15}{8}$$

$$(5) \quad \begin{vmatrix} u & 0 & 1 & u^2 & 1 \\ 1 & 1 & u & u^3 & 1 \\ 0 & 0 & u & u^4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = u^2 - u + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{1/2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i) \quad .$$

bitte wenden

$$(6) \text{ a) } \vec{h} \vec{h}^T = 1, \quad \vec{h}^T \vec{h} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ -1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = I - 2\vec{h}^T \vec{h} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

c) Wegen $B^T B = I$ ist B orthogonal.

$$(7) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{mit } \beta \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

$$(8) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 48, \quad \text{rang}(A) = 4$$

$$(9) \quad \det(A) = -16 + 96i. \text{ Wegen } \det(A) \neq 0 \text{ gilt } \text{rang}(A) = 5.$$

$$(10) \quad \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = (-4)(-4) = 16$$