Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

Dr. E. Luik

4. August 2017

Klausur zur **Mathematik II**

für die Studiengänge **Chemie, Life Science** und **Nanoscience**

Name	**Vorname**	**Matrikel-Nr.**	**Studiengang**

Allgemeine Richtlinien:

1. Diese Klausur beinhaltet **fünf** verschiedene Aufgaben (Rückseite beachten). Kontrollieren Sie Ihr Exemplar, ein Austauschexemplar kann Ihnen sofort ausgehändigt werden.
2. Bitte schreiben Sie auf dieses Blatt Ihren Namen und die Matrikelnummer und auf jedes Blatt Ihren Namen.
   Dieses Blatt muss wieder abgegeben werden.
3. **Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.** Schreiben Sie die Lösungen **mit Tinte oder Kugelschreiber**. Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen Rand für die Korrektur.
4. Die Klausur dauert 90 Minuten.
5. **Zugelassene Hilfsmittel:** 2 handgeschriebene Blätter (DIN A 4) mit eigenen Notizen (keine Kopien, keine Verkleinerungen).
   Alle anderen Hilfsmittel (Taschenrechner, Handy, i-Phone, Tablet, ...) sind verboten und führen zum Ausschluss von der Klausur.
6. Zum Bestehen sind mindestens 18 Punkte erforderlich (ohne Bonuspunkte).

Viel Erfolg!

Korrektur

Aufgabe	1	2	3	4	5	gesamt	Bonus	total	Note
Punkte	9	7	9	13	7	45	5	50	
erreicht									

bitte wenden

Aufgabe 1: (9 Punkte)

a) Lösen Sie $t\dot{x} + 3\dot{x} = \sqrt{x+2}\,,\ x(-2) = 2$.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen von $\ddot{x} = -6\dot{x} - 9x$.

Aufgabe 2: (7 Punkte)
Für welche λ, $\mu \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \mu \end{pmatrix}$$

a) genau eine Lösung,
b) keine Lösung,
c) unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 3: (9 Punkte)
Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ \varphi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x-z \\ -x+3y+3z \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Ist φ injektiv (mit Begründung)?
b) Welche Matrixdarstellung besitzt φ bzgl. der natürlichen Basis $\mathcal{N}$ im Urbildraum und der Basis $\mathcal{A}$ im Zielraum?
c) Finden Sie ein $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, welches bezüglich φ kein Urbild besitzt.

Aufgabe 4: (13 Punkte)
Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -8 & -6 & 8 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenräume.
b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix T mit $D = T^{-1}AT$.
c) Lösen Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1\,, & x_1(0) &= -1 \\ \dot{x}_2 &= -8x_1 - 6x_2 + 8x_3\,, & x_2(0) &= 5 \\ \dot{x}_3 &= -4x_1 - 4x_2 + 6x_3\,, & x_3(0) &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 5: (7 Punkte)
a) Es sei C die Kurve mit der Parametrisierung $r : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,,\ r(t) = (2\cos(t)+1,\, 2\sin(t))$. Skizzieren Sie diese Kurve.
b) Bestimmen Sie die Mantelfläche, welche die Funktion $f(x,y) = xy^2 - y^2$ über der Kurve C einschließt.