Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

Dr. E. Luik

27. Juli 2018

Klausur zur **Mathematik II**

für die Studiengänge **Chemie, Life Science** und **Nanoscience**

Name	**Vorname**	**Matrikel-Nr.**	**Studiengang**

Allgemeine Richtlinien:

1. Diese Klausur beinhaltet **fünf** verschiedene Aufgaben (Rückseite beachten). Kontrollieren Sie Ihr Exemplar, ein Austauschexemplar kann Ihnen sofort ausgehändigt werden.
2. Bitte schreiben Sie auf dieses Blatt Ihren Namen und die Matrikelnummer und auf jedes Blatt Ihren Namen.
   Dieses Blatt muss wieder abgegeben werden.
3. **Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.** Schreiben Sie die Lösungen **mit Tinte oder Kugelschreiber**. Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen Rand für die Korrektur.
4. Die Klausur dauert 90 Minuten.
5. **Zugelassene Hilfsmittel:** 2 handgeschriebene Blätter (DIN A 4) mit eigenen Notizen (keine Kopien, keine Verkleinerungen).
   Alle anderen Hilfsmittel (Taschenrechner, Handy, i-Phone, Tablet, ...) sind verboten und führen zum Ausschluss von der Klausur.
6. Zum Bestehen sind mindestens 18 Punkte erforderlich (ohne Bonuspunkte).

Viel Erfolg!

Korrektur

Aufgabe	1	2	3	4	5	gesamt	Bonus	total	Note
Punkte	9	7	9	11	9	45	5	50	
erreicht									

bitte wenden

Aufgabe 1: (9 Punkte)

a) Berechnen Sie die Lösung von $\dot{x} + \dfrac{x}{t} - \ln(t) = 0\,,\ x(1) = \dfrac{3}{4}$.

b) Lösen Sie $\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0\,,\ x(0) = 2, \dot{x}(0) = -2.$

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $A^T A$.

b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $B = \lambda A$ eine orthogonale Matrix?

c) Bestimmen Sie $\det(A)$.

Aufgabe 3: (9 Punkte)

a) Es sei ψ die lineare Abbildung, welche jeden Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ um den Winkel $\frac{\pi}{6}$ entgegen des Uhrzeigersinns dreht. Welche Matrixdarstellung (bzgl. der natürlichen Basis) besitzt diese Abbildung ψ ? Bestimmen Sie $\psi(1,1)$.

b) Gegeben seien die lineare Abbildung

$$\varphi\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,,\ \varphi(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 3x-y-2z \end{pmatrix}$$

und die Basen

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\,,\ \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\ .$$

Welche Matrixdarstellung besitzt φ bzgl. der Basis $\mathcal{A}$ im Urbildraum und der Basis $\mathcal{B}$ im Zielraum?

Aufgabe 4: (11 Punkte)

a) Eine reelle 4×4-Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = 0$.

(1) Ist A invertierbar (mit Begründung)?

(2) Ist A diagonalisierbar (mit Begründung)?

(3) Welchen Rang hat A ?

b) Berechnen Sie die Lösung von

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - 5y\,, & x(0) &= 2 \\ \dot{y} &= x - 3y\,, & y(0) &= -2 \end{aligned}$$

Aufgabe 5: (9 Punkte)

Es sei $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ -1 \le x \le 1;\ |x| - 1 \le y \le \sqrt{1-x^2} \right\}$ und C der positiv orientierte Rand von B mit dem Anfangs- und Endpunkt $(1,0)$.

Skizzieren Sie B und C und bestimmen Sie den Wert der Integrale

$$\iint\limits_B y\,dF \quad \text{und} \quad \int\limits_C (y-x)\,dx + (x-y)\,dy \quad .$$