Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

Dr. E. Luik

11. Okt. 2017

Nachklausur zur **Mathematik II**

für die Studiengänge **Chemie, Life Science** und **Nanoscience**

Name	**Vorname**	**Matrikel-Nr.**	**Studiengang**

Allgemeine Richtlinien:

1. Diese Klausur beinhaltet **fünf** verschiedene Aufgaben (Rückseite beachten). Kontrollieren Sie Ihr Exemplar, ein Austauschexemplar kann Ihnen sofort ausgehändigt werden.
2. Bitte schreiben Sie auf dieses Blatt Ihren Namen und die Matrikelnummer und auf jedes Blatt Ihren Namen.
   Dieses Blatt muss wieder abgegeben werden.
3. **Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.** Schreiben Sie die Lösungen **mit Tinte oder Kugelschreiber**. Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen Rand für die Korrektur.
4. Die Klausur dauert 90 Minuten.
5. **Zugelassene Hilfsmittel:** 2 handgeschriebene Blätter (DIN A 4) mit eigenen Notizen (keine Kopien, keine Verkleinerungen).
   Alle anderen Hilfsmittel (Taschenrechner, Handy, i-Phone, Tablet, ...) sind verboten und führen zum Ausschluss von der Klausur.
6. Zum Bestehen sind mindestens 18 Punkte erforderlich (ohne Bonuspunkte). Bonuspunkte gibt es nur für den ersten Versuch.

Viel Erfolg!

Korrektur

Aufgabe	1	2	3	4	5	gesamt	Bonus	total	Note
Punkte	9	8	9	10	9	45	5	50	
erreicht									

bitte wenden

Aufgabe 1: (9 Punkte)

a) Eine Differentialgleichung der Form $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ hat die Lösung $x(t) = 2t\exp(-3t)$.

(1) Um welche Differentialgleichung handelt es sich?

(2) Welche Lösung besitzt diese Dgl zu den Anfangswerten $x(0) = -2,\ \dot{x}(0) = 2$?

b) Bestimmen Sie alle Lösungen von $\dot{x} - x - t^2 = 0$.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & \lambda \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ den Rang 3 ?

b) Berechnen Sie die zu $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2i \\ i & 1 & 1 \\ 0 & i+1 & i \end{pmatrix}$ inverse Matrix.

Dabei bezeichnet i die imaginäre Einheit.

Aufgabe 3: (9 Punkte)

a) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, welche den $\mathbb{R}^3$ auf die Ebene $E : 2x - 2y + z = 0$ projiziert.

(1) Welche Matrixdarstellung (bzgl. der natürlichen Basis) besitzt φ ?

(2) Bestimmen Sie den Nullraum vom φ.

(3) Projizieren Sie den Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf E.

b) Für die 3×3 - Matrix A gilt $\det(A) = 3$. Weiter sei $B = \frac{1}{2}A$. Bestimmen Sie $\det(A^{-1})$ und $\det(B)$.

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Es seien $A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ -3 & 2 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\vec{x}$ ein Eigenvektor von A ist. Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_1. Geben Sie eine Basis von $\mathrm{eig}(A, \lambda_1)$ an.

b) Ist $\lambda_2 = 2$ ein weiterer Eigenwert? Falls ja, so berechnen Sie $\mathrm{eig}(A, \lambda_2)$.

c) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix T mit $T^{-1}AT = D$.

Aufgabe 5: (9 Punkte)

Gegeben seien das Vektorfeld

$$F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = \left(\frac{-2x}{16 - x^2 - (y+1)^2}, \frac{-2(y+1)}{16 - x^2 - (y+1)^2} \right)$$

und die Kurve C mit der Parametrisierung $r : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (\cos(t), \sin(t) + 1)$.

a) Skizzieren Sie die Kurve C.

b) Ist das Vektorfeld $F(x,y)$ konservativ? Falls ja, so bestimmen Sie ein Potential.

c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_C f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy$.