Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

Dr. E. Luik

10. Okt. 2018

NACHKLAUSUR ZUR **Mathematik II**

für die Studiengänge **Chemie, Life Science** und **Nanoscience**

Name	**Vorname**	**Matrikel-Nr.**	**Studiengang**

Allgemeine Richtlinien:

1. Diese Klausur beinhaltet **fünf** verschiedene Aufgaben (Rückseite beachten). Kontrollieren Sie Ihr Exemplar, ein Austauschexemplar kann Ihnen sofort ausgehändigt werden.
2. Bitte schreiben Sie auf dieses Blatt Ihren Namen und die Matrikelnummer und auf jedes Blatt Ihren Namen.
   Dieses Blatt muss wieder abgegeben werden.
3. **Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.** Schreiben Sie die Lösungen **mit Tinte oder Kugelschreiber**. Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen Rand für die Korrektur.
4. Die Klausur dauert 90 Minuten.
5. **Zugelassene Hilfsmittel:** 2 handgeschriebene Blätter (DIN A 4) mit eigenen Notizen (keine Kopien, keine Verkleinerungen). Alle anderen Hilfsmittel (Taschenrechner, Handy, i-Phone, Tablet, ...) sind verboten und führen zum Ausschluss von der Klausur.
6. Zum Bestehen sind mindestens 18 Punkte erforderlich (ohne Bonuspunkte). Bonuspunkte gibt es nur für den ersten Versuch.

Viel Erfolg!

Korrektur

Aufgabe	1	2	3	4	5	gesamt	Bonus	total	Note
Punkte	8	7	9	12	9	45	5	50	
erreicht									

bitte wenden

Aufgabe 1: (8 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösung von $\dot{x} - x^2 - 2x + 3 = 0,\ x(0) = 2$.

b) Es sei $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) Ist A normal (mit Begründung)?
(2) Berechnen Sie A^2 .
(3) Ist A invertierbar? Falls ja, so bestimmen Sie A^{-1} .

Aufgabe 2: (7 Punkte)

a) Welche Funktion $p(x) = a + bx^2$ geht möglichst gut durch die Punkte $(-1, 3),\ (1, 4),\ (2, 8)$?

b) Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ 10 & 10 & 2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Determinante und den Rang von $C = A \cdot B$.

Aufgabe 3: (9 Punkte)

a) Ermitteln Sie die Drehmatrix D_α, welche die Gerade $G_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ in die Gerade $G_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$ überführt.

b) Es seien $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x - 3y \\ 5y \end{pmatrix}$ und $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

(1) Welche Matrixdarstellung besitzt φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ in Urbildraum und der natürlichen Basis im Zielraum?
(2) Bestimmen Sie den Kern von φ .
(3) Ist φ injektiv (mit Begründung)?

Aufgabe 4: (12 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A.
b) Finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine unitäre Matrix U mit $D = U^+ A U$.
c) Bestimmen Sie die Spektraldarstellung von A.
d) Ermitteln Sie eine Matrix B mit $B^2 = A$.

Aufgabe 5: (9 Punkte)

Gegeben seien das Vektorfeld

$$F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1\,,\ \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right)$$

und die Kurve C mit der Parametrisierung $r : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = \big((t - 1)^2, 3t\big)$.

a) Skizzieren Sie die Kurve C.

b) Berechnen Sie $\int\limits_C f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy$.