Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

WS 2018/19

Dr. E. Luik

Übungen zu **Numerik I**

Blatt 7

Aufgabe 13: (schriftlich, 10 Punkte)

a) Sei $\Phi : [a,b] \to [a,b]$ s-mal stetig differenzierbar ($s \geq 1$) mit $\Phi(\xi) = \xi$ für ein $\xi \in (a,b)$. Ferner gelte

$$\Phi'(\xi) = \Phi^{(2)}(\xi) = \ldots = \Phi^{(s-1)}(\xi) = 0 \quad \text{und} \quad \Phi^{(s)}(\xi) \neq 0$$

(im Falle $s = 1$ sei zusätzlich $|\Phi^{(1)}(\xi)| < 1$). Zeigen Sie, dass dann das von Φ erzeugte Iterationsverfahren die Konvergenzordnung s besitzt.

b) Gegeben sei die Iterationsfunktion

$$\Phi(x) = \frac{2x^2 - x}{3x - 2} \quad .$$

(1) Bestimmen Sie alle Fixpunkte von Φ.

(2) Welche Konvergenzordnung besitzt das von Φ erzeugte Verfahren in diesen Fixpunkten (mit Beweis)?

c) Transformieren Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{array}{lll} \ddot{x}_1 = x_1 \cos(x_2) & , \; x_1(0) = 5 & , \; \dot{x}_1(0) = 3 \\ \ddot{x}_2 = e^{t(x_1 - x_2)} & , \; x_2(0) = 1 & , \; \dot{x}_2(0) = 4 \end{array} \quad .$$

auf ein autonomes Dgl-System 1. Ordnung. Wie lauten die Anfangsbedingungen?

Aufgabe 14: (Programmieraufgabe)

a) Erstellen Sie Matlab-Funktionen zur numerischen Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\dot{z} = F(z), \quad z(t_0) = y^{(0)} \quad (y^{(0)} \in \mathbb{R}^n, F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$$

(jeweils ein Schritt zur Schrittweite h) und zwar für das

(1) Euler-Cauchy-Verfahren,

(2) zweistufige Verfahren von Heun,

(3) klassische Runge-Kutta-Verfahren.

b) Gegeben sei die skalare Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \lambda \sin x = 0, \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1$$

Lösen Sie mit den obigen Verfahren (zur Schrittweite h) diese Anfangswertaufgabe im Intervall $[0, 20]$ (Ausgabe in eine Datei). Zeichnen Sie ferner die Näherungslösungen in ein Schaubild (Phasenebene).
Testen Sie das Programm für $\lambda = 10, x_0 = 0, x_1 = 5$ und die Schrittweiten $h = 0.5, h = 0.1$ und $h = 0.01$.

Abgabe: Aufgabe 13: 11. Dez. 2018, 15.00 Uhr in der Vorlesung,
Aufgabe 14: 11. Dez. 2018, 13.30 Uhr per E-Mail an Ihren Tutor.