**Universität Konstanz**

Fachbereich Mathematik
und Statistik

WS 2018/19

Dr. E. Luik

# Übungen zu **Numerik I**

## Blatt 8

**Aufgabe 15:** (schriftlich, 10 Punkte)

**a)** Gegeben sei die skalare nichtautonome Anfangswertaufgabe

$$\dot{x} \;=\; f(t,x)\;, \qquad x(t_0) \;=\; y^{(0)}\;.$$

Geben Sie für diesen Fall die Formeln für das klassische Runge-Kutta-Verfahren an.

**b)** Gegeben sei die skalare Differentialgleichung $\dot{x} = f(x), x(t_0) = y^{(0)}$ mit Lipschitz-stetigem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beim Rückwärts-Euler-Verfahren zur Schrittweite $h > 0$ ist dann die implizite Gleichung $y^{(1)} = y^{(0)} + hf(y^{(1)})$ zu lösen. Zeigen Sie, dass diese Gleichung für hinreichend kleines $h$ genau eine Lösung besitzt.

**c)** Zeigen Sie für den skalaren autonomen Fall, dass das zweistufige Verfahren von Heun die Konsistenzordnung $p = 2$ besitzt.

**Aufgabe 16:** (Programmieraufgabe)

Gegeben sei die skalare nichtautomone Anfangswertaufgabe

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = y^{(0)}.$$

**a)** Schreiben Sie zunächst eine Matlab-Funktion, welche für den skalaren nichtautonomen Fall einen Schritt des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens durchführt (verwenden Sie dazu Aufgabe 15 a)).

**b)** Berechnen Sie dann mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren *mit Schrittweitensteuerung* (vgl. Vorlesung) eine Näherungslösung im Intervall $[t_0, b]$.
Ausgegeben werden sollen für jeden Schritt die Größen $t_k$, die aktuelle Schrittweite $h$ und $y^{(k)}$. Zeichnen Sie diese Näherungslösung in ein Schaubild.
Lösen Sie mit diesem Programm im Intervall $[0, 10]$ mit der Anfangsschrittweite $h = \frac{1}{8}$, sowie $\varepsilon_1 = 10^{-5}, \varepsilon_2 = 10^{-4}$ die Anfangswertaufgabe

$$\dot{v}(t) = g - \frac{k(t)}{m} v^2(t), \quad v(0) = 0$$

für $g = 9.81$ mit $m = 5$ bzw. $m = 10$ und

$$k(t) \;:=\; \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \le t < 4 \\ 2 + 4(t-4) & \text{für } 4 \le t < 6 \\ 10 & \text{für } t \ge 6 \end{cases}$$

**c)** Lösen Sie diese Differentialgleichung auch mit der Matlab-Funktion `ode45`.

**Abgabe:** Aufgabe 15: 18. Dez. 2018, 15.00 Uhr in der Vorlesung,
Aufgabe 16: 18. Dez. 2018, 13.30 Uhr per E-Mail an Ihren Tutor.