Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

WS 2018/19

Dr. E. Luik

Übungen zu **Numerik I**

Blatt 10

Aufgabe 19: (schriftlich, 10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass bei Gauß-Quadraturformeln alle Gewichte positiv sind.

b) Gegeben sei das Integral

$$I = \int_0^2 \exp(x^2 - 4)\, dx \qquad .$$

(i) Zur näherungsweisen Berechnung dieses Integrals wird die zusammengesetzte Trapezregel T_N mit N (gleich großen) Teilintervallen verwendet. Wieviele Teilintervalle sind mindestens zu wählen, damit $|T_N - I| < 10^{-3}$ gilt?

(ii) Geben Sie eine zweite zusammengesetzte Quadraturformel F_N mit N (gleich großen) Teilintervallen an, so dass für jedes $N \geq 1$ der Integralwert I zwischen F_N und T_N liegt.

c) Bestimmen Sie den Peano-Kern bei der Keplerschen Fassregel im Falle $[a, b] = [-1, 1]$, und leiten Sie daraus die Fehlerdarstellung

$$R[f] = -\frac{1}{90} f^{(4)}(\xi) \quad \text{für ein } \xi \in (-1, 1)$$

her (dabei sei $f \in \mathcal{C}^4[-1, 1]$).

Aufgabe 20: (Programmieraufgabe)

Gegeben sei $f \in \mathcal{C}[a, b]$. Erstellen Sie ein Matlab-Programm zur Bestimmung von Näherungswerten für $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ mit Hilfe des Romberg-Verfahrens. Dabei ist das Romberg-Tableau nach den in der Vorlesung angegebenen Kriterien zu berechnen. Verwenden Sie die Matlab-Funktion für die zusammengesetzte Mittelpunktsregel aus Aufgabe **18 a)**.
Abbruchkriterien (mit vorgegebenen $\varepsilon > 0$):

1. $|T^1_{j-1} - T^0_{j-1}| \leq \varepsilon$, dann wird T^0_j als Näherung akzeptiert.
2. $|T^1_{j-1} - T^0_{j-1}| > \varepsilon$ und $j = K$, dann wird die Berechnung des Tableaus bei T^0_K beendet.

Ausgegeben werden sollen alle Elemente des Romberg-Tableaus.
Testen Sie das Programm mit $\varepsilon := 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}$ sowie $K := 10$ für das Integral

$$F(s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^s \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \qquad \text{für } s = 1, 5, 50.$$

Abgabe: Aufgabe 19: 15. Jan. 2019, 15.00 Uhr in der Vorlesung,
Aufgabe 20: 15. Jan. 2019, 13.30 Uhr per E-Mail an Ihren Tutor.