



Übungen zu Numerik I

Blatt 12

Aufgabe 23: (schriftlich, 10 Punkte)

a) Für $n \geq 2$ sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Durch

$$\begin{aligned} N^*(A) &:= \max\{|a_{ik}| : 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n\} , \\ N(A) &:= n \cdot \max\{|a_{ik}| : 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n\} \end{aligned}$$

werden zwei Matrixnormen definiert. Zeigen Sie:

- (i) $N(A)$ ist submultiplikativ.
 - (ii) $N(A)$ ist verträglich mit den Vektornormen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$.
 - (iii) $N^*(A)$ ist nicht submultiplikativ.
- b) Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär. Zeigen Sie: Durch Zeilenvertauschungen kann B in eine Matrix A übergeführt werden, deren Diagonalelemente von Null verschieden sind.

Aufgabe 24: (Programmieraufgabe)

Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Erstellen Sie ein Matlab-Programm zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit Hilfe des Gesamtschrittverfahrens (Gauß-Jacobi-Verfahren) zum Startwert $x^{(0)}$.

Die Iteration soll abgebrochen werden, falls gilt:

$$\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\|_\infty < \varepsilon \quad \text{und} \quad \|Ax^{(i)} - b\|_\infty < \varepsilon$$

für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$. Es sollen jedoch höchstens s Iterationsschritte durchgeführt werden.

Auszudrucken sind:

- (1) A , b , $x^{(0)}$, ε und s
- (2) die Anzahl k der benötigten Iterationen, die Näherungslösung $x^{(k)}$ sowie $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$ und $\|Ax^{(k)} - b\|_\infty$.

bitte wenden

Testen Sie das Programm mit den Datensätzen:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 1 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = 20, \quad \varepsilon = 10^{-7},$$

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & 5 & 1 & -2 \\ 6 & 0 & 12 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & 1 & -10 & -1 \\ 8 & -3 & 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -38 \\ 11 \\ 0 \\ -34 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} s = 20, \\ \varepsilon = 10^{-5}. \end{array}$$

Abgabe: Aufgabe 23: 29. Jan. 2019, 15.00 Uhr in der Vorlesung,
Aufgabe 24: 29. Jan. 2019, 13.30 Uhr per E-Mail an Ihren Tutor.