Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

WS 2018/19

Dr. E. Luik

Übungen zu **Numerik I**

Blatt 13

Aufgabe 25: (schriftlich, 10 Punkte)
a) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$). Wir zerlegen die Matrix A wie in der Vorlesung: $A = L + D + U$. Zu $\omega \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ sei

$$\Phi_\omega(x) := [(1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)]x + \omega D^{-1}b$$

(wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet).

1. Zeigen Sie: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ist Fixpunkt von Φ_ω genau dann, wenn $A\bar{x} = b$ gilt.
2. Für jeden Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ konvergiere das Gesamtschrittverfahren. Zeigen Sie, dass dann auch für jedes $\omega \in (0,1)$ das von Φ_ω erzeugte Iterationsverfahren für jeden beliebigen Startwert konvergiert.

b) Gegeben sei die Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; F(x,y) := 100(y - x^2)^2 \; + \; (1-x)^2 \quad .$$

i) Bestimmen Sie die Nullstellen von $\operatorname{grad} F(x,y)$.

ii) Welche dieser Nullstellen ist ein lokales Minimum von F (mit Beweis)?

Aufgabe 26: (Programmieraufgabe)
Gegeben sei $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Erstellen Sie ein Matlab-Programm, welches mit Hilfe des mehrdimensionalen Newton-Verfahrens eine Nullstelle von F berechnet (vgl. Vorlesung). Zur Lösung des auftretenden linearen Gleichungssystems $Ax = b$ darf die Matlab-Funktion `x = A \ b` verwendet werden.
Die Newton-Iteration soll abgebrochen werden, falls gilt

$$\| F(x^{(k)}) \|_2 < \varepsilon \text{ und } \| x^{(k-1)} - x^{(k)} \|_2 < \varepsilon.$$

Dabei ist ε die gegebene Genauigkeitsschranke. Es sollen jedoch maximal 30 Iterationen durchgeführt werden.
Lösen Sie damit für $x^{(0)} = (1,1,1)$ und $\varepsilon = 10^{-4}$ das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 16x^4 + 16y^4 + z^4 &= 16 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ x^3 - y &= 0. \end{aligned}$$

Abgabe: Aufgabe 25: 5. Febr. 2019, 15.00 Uhr in der Vorlesung,
Aufgabe 26: 5. Febr. 2019, 13.30 Uhr per E-Mail an Ihren Tutor.