Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

WS 2018/19

Dr. E. Luik

Übungen zu **Numerik I**

Blatt 14

Aufgabe 27: (schriftlich, freiwillig, 10 Zusatzpunkte)

a) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, so gilt für die zur euklidischen Vektornorm gehörende lub-Norm

$$\mathrm{lub}_2(A) = \rho(A).$$

Dabei bezeichnet $\rho(A)$ den Spektralradius von A.
Zeigen Sie weiter: Ist A eine Diagonalmatrix, so gilt

$$\mathrm{lub}_2(A) = \max_{1\le i\le n} |a_{ii}|.$$

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Weiter sei

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A\}.$$

Zeigen Sie:

$$\mathrm{cond}_2(A) := \mathrm{lub}_2(A)\,\mathrm{lub}_2(A^{-1}) = \frac{\max\{\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}}{\min\{\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}}$$

c) Berechnen Sie $\mathrm{cond}_2(A)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28: (Programmieraufgabe, freiwillig, Zusatzpunkte)

Wir betrachten einen biologischen Prozess, in dessen Verlauf ein Substrat X mit Hilfe eines Enzyms E in ein Produkt P verwandelt wird (vgl. Vorlesung). Dabei bestehe zwischen der Substratkonzentration c und der Abbaugeschwindigkeit ν der Zusammenhang

$$\nu(c) = \frac{\mu c}{K + c} \text{ mit Parametern } \mu > 0 \text{ und } K > 0.$$

Eine Messung liefert folgende Ergebnisse

i	1	2	3	4	5	6	7
c_i	0.3330	0.1670	0.0833	0.0416	0.0208	0.0104	0.0052
ν_i	3.636	3.636	3.236	2.666	2.114	1.466	0.866

bitte wenden

Die Bestimmung der Parameter μ und K anhand dieser Messergebnisse führt uns auf das Problem der Minimierung der Funktion

$$h(K, \mu) := \sum_{i=1}^{7} \left(\nu_i - \frac{\mu c_i}{K + c_i} \right)^2 .$$

Berechnen Sie ein (lokales) Minimum von dieser Funktion, indem Sie die Differentialgleichung

$$\dot{z} = -\operatorname{grad} h(z)$$

mit Hilfe der Matlab-Funktion `ode15s` lösen und den in der Vorlesung beschriebenen Algorithmus mit Schrittweite σ und Genauigkeitsschranke ε verwenden.
Der Ausdruck soll folgende Größen enthalten:

$$k\sigma, z^{(k)}, \operatorname{grad} h(z^{(k)}), h(z^{(k)}).$$

Zeichnen Sie die Messwerte und die optimale Kurve $\nu(c)$ in ein Schaubild.
Starten Sie das Programm mit $z^{(0)} = (K_0, \mu_0) = (0.1, 5), \sigma = 0.2, \varepsilon = 10^{-6}$.

Abgabe: Aufgabe 27: 12. Februar 2019, 13.30 Uhr in der Vorlesung,
Aufgabe 28: 12. Februar 2019, 13.30 Uhr per E-Mail an Ihren Tutor.