Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

Dr. E. Luik

19. Februar 2018

Klausur zur Numerik I

Name	Vorname	Matrikel-Nr.	Studiengang

Allgemeine Richtlinien:

1. Diese Klausur beinhaltet **sechs** verschiedene Aufgaben (Rückseiten beachten). Kontrollieren Sie Ihr Exemplar, ein Austauschexemplar kann Ihnen sofort ausgehändigt werden. Das Aufgabenblatt muss wieder abgegeben werden.
2. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
3. Schreiben Sie Ihre Matrikelnummer auf dieses Deckblatt und auf jedes einzelne Blatt. Die Angabe des Namens erfolgt freiwillig.
4. Schreiben Sie die Lösungen **mit Tinte oder Kugelschreiber**.
5. **Zugelassene Hilfsmittel:** 2 Seiten (DIN A 4) mit eigenen Notizen (erstellt mit Latex), welche dieser Klausur beigefügt sind.
   Alle anderen Hilfsmittel sind verboten und führen zum Ausschluss von der Klausur.
6. Die Klausur dauert **90 Minuten**.
7. Zum Bestehen sind mindestens 15 Punkte erforderlich.

Viel Erfolg!

Korrektur

	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6	gesamt	Note
Punkte	7	4	5	5	5	6	32	–
erreicht								

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Bestimmen Sie den natürlichen kubischen Spline zu den Stützpaaren $(0,1),\ (1,0),\ (2,3)$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Was leistet das folgende Matlab-Programm (numerische Aufgabenstellung)? Beschreiben Sie auch die Abbruchbedingung in der Funktion `unbekannt`.

```
 function y = unbekannt(g,x0,x1,eps)
 while ( (abs(g(x1)) >= eps) | (abs(x1-x0) >= eps) )
    s = x1 - (x1 - x0)*g(x1)/(g(x1)-g(x0));
    x0 = x1;
    x1 = s;
 end
 y = x1;

 function y = f(t)
 y = exp(-t^2) + t^2 - 5;

clear all;
x0 = 2;
x1 = 3;
eps = 1d-10;
z = unbekannt(@f,x0,x1,eps);
ausgabe = sprintf(' Das Ergebnis ist x = %15.12f',z);
disp(ausgabe);
```

Aufgabe 3: (5 Punkte)

a) Es sei H eine Householder-Matrix und μ ein Eigenwert von H. Zeigen Sie: $\mu \in \{-1, 1\}$.

b) Bestimmen Sie alle Householder-Matrizen der Form

$$H = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ * & \frac{1}{2} & * & * \\ * & * & 1 & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Es seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ii} \neq 0 \ (i = 1, \ldots, n)$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

bitte wenden

Erstellen Sie eine **Matlab-Funktion**

```
function [y,iter] = gesamtschritt(A,b,x0,eps,max) ,
```

welche mit dem Gesamtschrittverfahren das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ löst. Dabei bedeutet `x0` den Startwert und `eps` eine Genauigkeitsschranke. Das Verfahren soll abbrechen, falls für die Iterierten $x^{(i)}$ gilt

$$\| x^{(i)} - x^{(i-1)} \|_\infty < \texttt{eps} \quad \textbf{und} \quad \| Ax^{(i)} - b \|_\infty < \texttt{eps} .$$

In diesem Fall setze man `y =` $x^{(i)}$ und `iter = i`. Es sollen jedoch höchstens `max` Iterationen durchgeführt werden. Falls diese Anzahl nicht ausreicht, so setze man `y = 0` und `iter = max+1` und beende das Verfahren.

Aufgabe 5: (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Gauß-Quadraturformel mit m Stützstellen den Exaktheitsgrad $M = 2m - 1$ hat.

b) Gegeben sei das Integral

$$I = \int_0^1 \exp\left(x^2 - 1\right) \, dx \quad .$$

Zur näherungsweisen Berechnung dieses Integrals wird die zusammengesetzte Trapezregel T_N mit N gleich großen Teilintervallen verwendet. Wieviele Teilintervalle sind mindestens zu wählen, damit $|T_N - I| < 10^{-2}$ gilt.

Aufgabe 6: (6 Punkte)

a) Berechnen Sie $\mathrm{lub}_2(A)$ und $\mathrm{cond}_2(A)$ von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad .$$

b) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion des RKV mit der Verfahrensmatrix

$$\beta = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \quad .$$