Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 07. Nov., WS 2005/06
Abgabe: 14. Nov. bis 10 Uhr

Analysis I

3. Übungsblatt

Aufgabe 1: Zum Warmwerden

Beispielsatz zum *Infimum* in der Alltagssprache: "Das Verständnis der folgenden vier Teilaufgaben ist das Infimum dessen, was Sie von diesem Übungsblatt 'mitnehmen' sollten." Oder sagt man doch besser *Minimum*, um sich nicht gleich als Mathematiker zu outen und verständlicher zu wirken? Was wäre eigentlich richtiger?

a) Für zwei nichtleere, beschränkte Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ sei das Produkt definiert durch $A \cdot B := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A\, b \in B :\ x = ab\}$. Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\sup(A \cdot B) = \sup A\ \sup B\ \ ? \qquad \text{(mit Beweis !)}$$

b) Es sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt; ferner sei $-A := \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$. Zeigen Sie: es gibt eine größte untere Schranke von A, genannt *Infimum* von A oder kurz $\inf A$. **Hinweis:** Man zeige $\inf A = -\sup(-A)$.

c) Beweisen Sie folgende Charakterisierung des Infimums einer nicht-leeren, nach unten beschränkten Menge $A \subset \mathbb{R}$: $s = \inf A$ genau dann, wenn $s \leq a$ für alle $a \in A$ und wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $a \in A$ existiert, so daß $a < s + \epsilon$.

d) Geben Sie von den folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ das Supremum, Infimum und falls vorhanden das Minimum und Maximum an:

$$\text{i) } \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} \qquad \text{ii) } \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 7\} \qquad \text{iii) } \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \sqrt{5}\}$$
$$\text{iv) } \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} :\ x = \tfrac{1}{n}\} \qquad \text{v) } \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} :\ x = 1 - \tfrac{1}{n^2}\}$$
$$\text{vi) } \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} :\ x = 1 + (-1)^n \tfrac{1}{n}\}$$

Aufgabe 2: Rekursive Beziehung zwischen Potenzsummen

Mit der Berechnung von Potenzsummen haben sich schon Genies wie *Blaise Pascal* im 17. Jahrhundert beschäftigt. Tatsächlich geht auch die hier angegebene, rekursive Beziehung auf ihn zurück. Deshalb hier ein paar Worte zu seiner Person, die eine der vielseitigsten in der Wissenschaftsgeschichte darstellt, jedoch heute oftmals nur einseitig wahrgenommen wird:

Geboren wurde Pascal am 19. Juni 1623 in Clermont-Ferrand am Fuße des imposanten Vulkankegels Puy de Dôme in der zentralfranzösischen Auvergne. Seine mathematische Begabung zeigte sich bereits sehr früh; einer Anekdote zufolge soll er mit 12 Jahren die ersten 32 Lehrsätze aus Euklids *Geometrie* selbständig entdeckt haben. Später entwickelte er für seinen Vater, einem hochgestellten Steuerbeamten, die erste (mechanische) Rechenmaschine. Technische Verfeinerungen dieser Rechenmaschine waren bis zum Aufkommen der ersten elektronischen Taschenrechner während der sechziger Jahre in Gebrauch. Daneben galt sein Interesse auch der Physik, wobei er ähnlich wie Galilei die Bedeutung des Experiments erkannte. Basierend auf Ergebnissen von Torricelli (daher das *Torr*, veraltete Einheit des Druckes) sind vor allem seine Experimente zum Luftdruck (Barometer, Hydraulik) herausragend, welche er 1648 u.a. auf dem Gipfel des Puy de Dôme durchführen ließ. Die heute gebräuchliche Einheit des Druckes trägt daher seinen Namen (Wettervorhersage!). Darüberhinaus erlangte Pascal auch als Religionsphilosoph große Bedeutung. Er unterschied zwischen den *sciences d'autorité* (Theologie, Autorität der Bibel) und den *sciences de raisonnement*, wo Verstand und Beobachtung zur Erkenntnis führen. Wichtige Anliegen waren ihm die rationale Untermauerung des Glaubens sowie auch die Bedeutung der Liebe in ihren vielfältigen Ausprägungen (siehe z.B. *Pensées* (Gedanken), *Apologie*, *Discours sur les Passions de l'Amour* etc.). Als er am 19. August 1662 (ehe- und kinderlos) starb, fand man im Futter seines Mantels ein eindrucksvolles Bekenntnis zum christlichen Glauben – das berühmte *Memorial*, das er in der Nacht des 23. November 1654 verfaßt hatte und seitdem stets bei sich führte. Die unten angegebene Formel stammt übrigens aus demselben Jahr. [siehe auch Analysis I, W. Walter]

Bearbeitungshinweis: Wir werden im Laufe der weiteren Übungszettel noch mehrmals auf das Thema Potenzsummen und interessante Querverbindungen zurückkommmen. Nehmen Sie daher den obigen Beispielsatz zum Infimum auf keinen Fall wörtlich und lassen Sie sich diese Aufgabe nicht entgehen! Es wäre doch schade, wenn Ihnen am Ende des Semesters ein Steinchen in dem hübschen Mosaik fehlte, oder?

a) Es sei $S_p(N)$ für $N \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}_0$ definiert durch $S_p(N) := \sum_{k=1}^{N} k^p$. Leiten Sie die folgende Formel her, welche eine rekursive Berechnung der Potenzsummenformeln ermöglicht.

$$S_{p-1}(N) \;=\; \frac{1}{p}(N+1)^p \;-\; \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-2}\binom{p}{k}S_k(N) \;-\; \frac{1}{p}\,, \qquad p \geq 1$$

Tip: Expandieren Sie $(1+n)^p - n^p$ mittels des *Binomischen Lehrsatzes* (siehe Literaturaufgabe, Blatt 2). Summieren Sie die so erhaltene Gleichung anschließend über n von $1, ..., N$.

b) Wie sieht $S_0(N)$ aus? Benutzen Sie die obige Formel, um $S_1(N)$ und $S_2(N)$ zu bestimmen und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Aufgabe 2 des letzten Übungsblattes.

c) Welchen Erkenntnisgewinn ziehen Sie aus der rekursiven Beziehung im Hinblick auf die "Unklarheiten" von Aufgabe 2 des letzten Übungsblattes? (Zur Erinnerung: Es blieb z.B. fraglich, ob ein polynomialer Ansatz immer zum Ziel führt.)

Aufgabe 3: Eine "zu maximierende" Ungleichung

Übrigens, hier geht es nicht allein um das Maximieren einer Ungleichnung (insbesondere Teil c) sondern auch um die Maximierung Ihres Lernerfolgs. Also ran! Auch wenn c) vielleicht etwas schwieriger ist als die anderen Aufgaben, eine Stunde ihrer kostbaren Zeit sollte sie wert sein.

Es sei $b_1, ..., b_n$ eine Umordnung (Permutation) der gegebenen, positiven und paarweise verschiedenen reellen Zahlen $a_1, ..., a_n$, d.h. zu jedem Index $i \in \{1, ..., n\}$ gibt es genau einen Index $j \in \{1, ..., n\}$ mit $a_i = b_j$.

a) Zeigen Sie, daß die folgende Ungleichung (unabhängig von der gewählten Umordnung) besteht:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \geq n\ .$$

Tip: Schätzen Sie die Summe mittels der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel ab (siehe Aufgabe 3, Blatt 2). Das Verwenden der n'ten Wurzel ist erlaubt.

b) Gibt es auch eine *obere* Schranke für die Summe? Beweisen Sie zunächst (induktiv über die Größe der Menge), daß jede nichtleere, endliche Menge reeller Zahlen ein Maximum besitzt. Wieviele verschiedene Umordnungen gibt es eigentlich?

c) Für welche Umordnung wird die linke Seite maximal? Versuchen Sie Ihre Aussage zu beweisen.

d) Sehen Sie eine Verallgemeinerungsmöglichkeit? (Es ist eventuell sinnvoll, erst d) und dann c) zu klären!)