



Analysis I

4. Übungsblatt

Aufgabe 1: Einüben der Epsilontik

Beweisen Sie exemplarisch mindestens drei der Grenzwertsätze auf dem Merkblatt 2 unter Verwendung der ϵ -Definition des Grenzwerts. Beginnen Sie mit dem Satz, der Ihnen am sympathischsten erscheint; probieren Sie zum Schluß den unangenehmsten Satz zu beweisen.

Aufgabe 2: Zur Quadratwurzel

In der Vorlesung wurde gezeigt, daß es genau eine reelle Zahl $s > 0$ gibt mit $s^2 = a$. Der Beweis läßt sich leicht auf beliebige $a \geq 0$ verallgemeinern. Wir führen daher vorwegnehmend folgende Definition ein: Sind $a, r \geq 0$ und gilt $r^2 = a$ so schreibt man dafür $r = \sqrt{a}$ und bezeichnet r als *die (Quadrat-)Wurzel von a* . Beachte, daß diese Definition nur Sinn macht, nachdem man die Existenz und Eindeutigkeit der Wurzel gezeigt hat. Der *Existenzbeweis* für \sqrt{a} basiert (analog zur Vorlesung) auf folgenden Schritten:

- 1) Die Menge $A := \{x \geq 0 \mid x^2 \leq a\}$ ist im Fall $a \geq 0$ nicht leer und nach oben beschränkt.
- 2) Aufgrund des Vollständigkeitsaxioms existiert $r := \sup A$.
- 3) Die Annahmen $r^2 < a$ und $r^2 > a$ werden zum Widerspruch geführt; daraus folgt nach dem Trichotomiegesetz (bzw. O1, siehe Merkblatt 1, Axiome) $r^2 = a$. (Der Fall $a = 0$ ist gesondert zu behandeln.)

Um die *Eindeutigkeit* zu zeigen, nimmt man an, es gäbe zwei Wurzeln $r_1 \neq r_2$, woraus sich ebenfalls ein Widerspruch erzeugen läßt.

Im folgenden seien $a, b > 0$.

- 0) Führen Sie den skizzierten Beweis zur Wiederholung der Vorlesung im Detail aus.
- a) Zeigen Sie, daß die Quadratwurzel mit der Multiplikation vertauscht: $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. **Tip:** Nutzen Sie die Definition der Quadratwurzel aus.
- b) Zeigen Sie, daß die Quadratwurzel *monoton* ist, d.h. es gilt: $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.
- c) Zeigen Sie, daß die Quadratwurzel *folgenstetig* ist, ohne Teil d) zu benutzen. Das heißt, für jede nicht-negative, konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =: \xi$ vertauschen Wurzel und Grenzwertbildung.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \sqrt{\xi}$$

- d) Verifizieren Sie die Ungleichung $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|}$.
Diese Ungleichung drückt die Hölder-Stetigkeit der Quadratwurzel zum Index $\frac{1}{2}$ aus.
- e) Beweisen Sie die Abschätzung $\sqrt{a} \leq 1 + \frac{a}{2}$. Gibt es auch eine lineare Abschätzung nach unten?

Bemerkung: Entsprechende Aussagen gelten auch für allgemeine Wurzeln.

Klassische Approximationen des Altertums, Teil 1

Die Entdeckung der irrationalen Zahlen war für die antiken Mathematiker wie Pythagoras eine sehr schmerzhaftes Erkenntnis. Zwar bereitet daß formale Rechnen mit den reellen Zahlen keinerlei Probleme, weil die Axiome nicht zwischen rationalen und irrationalen Zahlen unterscheiden. Dennoch stellen uns irrationale Zahlen beim praktischen Gebrauch vor Schwierigkeiten. Da sie im wesentlichen nur über Gleichungen definiert sind, ist ihr Wert nicht unmittelbar ersichtlich. Ein Beispiel: Welche Zahl ist größer: $\sqrt[3]{2} + \sqrt[2]{3}$ oder $\sqrt[4]{5} + \sqrt[5]{4}$? Oder was ist $\sqrt{2} + \sqrt{3}$? Läßt sich diese Zahl auch einfacher schreiben? Das Problem besteht hier darin, daß es keine Zahl gibt, die sowohl $\sqrt{2}$ wie $\sqrt{3}$ als ganzzahliges Vielfaches hat; man spricht in diesem Zusammenhang von *Inkommensurabilität*. Diese Schwierigkeit tritt bei rationalen Zahlen nicht auf, denn zwei Brüche lassen sich immer auf einen gemeinsamen Nenner bringen und somit kann ihre Summe wieder als *ein* Bruch geschrieben werden. Man gelangt daher zu der Einsicht, daß es für das praktische Rechnen absolut notwendig ist, irrationale Zahlen

durch rationale Zahlen, die sich viel leichter handhaben lassen, zu **approximieren** d.h. anzunähern.

Definition: Eine *Intervallschachtelung* (engl. nested intervals) ist eine Folge *abgeschlossener, beschränkter* Intervalle, $(I_n)_{n \in \mathbb{N}} = ([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$, welche den folgenden Eigenschaften genügt:

- 1) (Inklusionseigenschaft) $\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} \subset I_n$.
- 2) (Kontraktionseigenschaft) $\forall \epsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : |I_n| := b_n - a_n < \epsilon$.

Das *Intervallschachtelungsprinzip* besagt, daß es genau eine reelle Zahl gibt, die in allen Intervallen enthalten ist. Man überlege sich, daß das Intervallschachtelungsprinzip direkt aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt, ja sogar dazu äquivalent ist.

Aufgabe 3: Antikes Wurzelziehen mit dem arithmetisch-harmonischen Mittel

Der obige Existenzbeweis für die Quadratwurzel ist nicht *konstruktiv* in dem Sinne, daß er kein Rezept enthält, wie die Quadratwurzel systematisch (näherungsweise) berechnet werden kann. Derartige Beweise, die sich auf reine Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen beziehen, werden Ihnen im Laufe Ihres Studiums noch *en masse* begegnen. Übrigens gibt es eine Fraktion von Mathematikern (Konstruktivisten), die solchen Beweisen kritisch gegenüberstehen, da sie es vermeiden möchten, Existenzaussagen auf Axiome zu gründen, die letztlich einer gewissen Willkür unterliegen (z.B. das umstrittene Auswahlaxiom, zweiwertige Logik etc.).

Neben dem *Bisektionsalgorithmus*, der bereits in der Vorlesung präsentiert wurde, stellt Ihnen die folgende Aufgabe ein weiteres Intervallschachtelungsverfahren vor, das Ihnen eine gezielte Berechnung der Quadratwurzel mit beliebiger Genauigkeit ermöglicht.

Es sei $0 < a < b$. Man definiere die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *rekursiv* durch $a_0 := a, b_0 := b$ sowie $a_{n+1} := H(a_n, b_n), b_{n+1} := A(a_n, b_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Hierbei bezeichnen A bzw. H das in Aufgabe 3 (Blatt 2) eingeführte *arithmetische* bzw. *harmonische Mittel*.

Ihre Aufgabe ist es nun nachzuweisen, daß die beiden Folgen gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergieren, den man als das *arithmetisch-harmonische Mittel* bezeichnen könnte. Tatsächlich entpuppt sich dieses als das bekannte geometrische Mittel $G(a, b) = \sqrt{ab}$. Folgen Sie bei der Aufgabenbearbeitung den angegebenen Schritten:

- a) Zeigen Sie, daß die Intervalle $I_k := [a_k, b_k]$ eine Intervallschachtelung bilden.
- b) Folgern Sie daraus die Existenz von \sqrt{ab} . **Tip:** Was ist $a_n b_n$?
- c) Berechnen Sie $\sqrt{5}$ bis zu einer Genauigkeit (Fehlertoleranz) von 10^{-3} sowohl mit dem Bisektionsalgorithmus (Startwerte 1 und 5) als auch mit dem vorgestellten Verfahren.
Erklärung: Der tatsächliche Wert x soll nicht mehr als 10^{-3} von Ihrem approximativen Wert \tilde{x} abweichen, d.h. $x \in [\tilde{x} - 0.001, \tilde{x} + 0.001]$.
- d) Welches Verfahren würden Sie subjektiv bevorzugen. Gibt es auch objektive Gründe?