Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 12. Dez., WS 2005/06
Abgabe: 19. Dez. bis 10 Uhr

Analysis I

8. Übungsblatt

Aufgabe 0: Nacharbeiten der Vorlesung

Das Majorantenkriterium ist von fundamentaler Bedeutung im Umgang mit Reihen, da es eine Art Urquell darstellt, aus dem sich durch Spezialisierung etliche weitere Konvergenzkriterien gewinnen lassen. Im Falle positiver Folgen ergibt es sich direkt aus der Monotonie und Beschränktheit der Partialsummenfolge. Im allgemeinen betrachtet man zunächst den Fall absoluter Konvergenz und schließt dann mittels des *Cauchy-Kriteriums* und der Dreiecksungleichung auf Konvergenz.

Arbeiten Sie den Beweis des *Majorantenkriteriums* (Vorlesung, Satz 44) vollständig aus, d.h. jeder Schritt ist durch Angabe von benutzten Sätzen, Definitionen etc. zu begründen. Sie können sich am Beweis des Satzes 42 orientieren, seien sie aber noch sorgfältiger!

Aufgabe 1: Zwei Sätzchen

Die Reihe $\sum_n a_n$ sei *absolut konvergent.* Beweisen Sie:

a) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge, falls $|x_{n+1} - x_n| < |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Die Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $B_n := \sum_{k=1}^n a_k^2$ ist konvergent. Kurz: $\sum_k |a_k| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_k a_k^2 < \infty$
Zeigen Sie anhand eines Beispiels, daß die auf die Voraussetzung der absoluten Konvergenz nicht verzichtet werden kann.

Der erste Teil von b) war ursprünglich als letzte Klausuraufgabe vorgesehen. Bitte geben Sie an, ob Sie diese Aufgabe als leichter oder schwerer empfinden, damit wir ein besseres Einschätzungsvermögen Ihrer Fähigkeiten erhalten.

Aufgabe 2: Anwendung & Ergänzung des Wurzel- und Quotientenkriteriums

Wurzel- und Quotientenkriterium ergeben sich aus dem Majorantenkriterium, indem man die geometrische Reihe als Vergleichsreihe heranzieht. Welches Kriterium in der Praxis anzuwenden ist, hängt wesentlich von der speziellen Gestalt der Folgenglieder ab, aus welchen sich die Reihe aufbaut. Im allgemeinen mag die Bedingung des Quotientenkriteriums leichter nachzuprüfen sein. Die Ungleichungskette in a) zeigt jedoch, daß das Quotientenkriterium versagt, sobald anhand des Wurzelkriteriums ebenfalls keine Entscheidung zu treffen ist (warum?). Insofern ist das Wuzelkriterium genauer; in vielen interessanten Fällen ist man allerdings von beiden Kriterien "im Stich" gelassen.

a) Wenden Sie das Quotientenkriterium und (falls dieses versagt) das Wuzelkriterium an, um die Konvergenz der folgenden Reihen zu überprüfen:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n \quad (|x| < 1, p \in \mathbb{N}), \qquad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha \geq 1), \qquad \text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}.$$

b) Zeigen Sie, daß für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver Zahlen folgende Ungleichungskette besteht:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Tip: $a_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N$

c) Folgern Sie daraus: Existiert $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: a \in \mathbb{R}$ so gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$. Entsprechend impliziert $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$.

Hinweis: Bei den Aufgaben 2a ii) sowie bei den Aufgaben 3b) und 3c) sollte man benutzen, daß $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n =: e \approx 2.71828$ existiert. Der Grenzwert stellt die Basis des *natürlichen Logarithmus* dar.

Aufgabe 3: Illustrative Anwendungen zu Aufgabe 2b)

Das Resultat von Aufgabe 3b) ermöglicht es, auf einfache Weise Grenzwerte zu berechnen, bei denen n-te Wurzeln involviert sind. Dabei hat man statt der Wurzel einen Qutienten zu betrachten, der in vielen Fällen leichter zu handhaben ist, da schließlich eine Rechenoperation 3. Stufe [Potenzieren/Radizieren] auf Rechenoperation 2. Stufe [Multiplizieren/Dividieren] reduziert wird. Ein Beispiel: gesucht $\lim\limits_{n\to\infty n} \sqrt[n]{n!}$.

$$\text{Setze} \quad a_n := n! \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \overset{n\to\infty}{\to} \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty n} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

Somit wächst $n!$ so schnell, daß es durch Anwenden der n-ten Wurzel nicht mehr auf einen endlichen Wert gedrückt wird, wie dies bei der Folge $\sqrt[n]{n}$ der Fall ist, deren Grenzwert sich mit 3b) ebenfalls ganz "billig" bestimmen läßt. Nun sind Sie an der Reihe:

a) Ermitteln Sie für eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver Zahlen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$. Inwiefern ergibt sich hier eine Parallele zu Aufgabe 5 vom Blatt 6?

b) Berechnen Sie ebenfalls: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+n)}$.

c) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine arithmetische Progression (Folge), also $a_n = a + nd$ mit $a > 0$ und $d \geq 0$. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von a, d) den Grenzwert der Folge $n(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n}/(a_1 + \ldots + a_n)$. Welche Bedeutung haben die Folgenglieder?