Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 19. Dez., WS 2005/06
Abgabe: 09. Jan. bis 10 Uhr

Analysis I

9. Übungsblatt

Aufgabe 1: Auf Zack und auf der Hut

Die *floor*-Funktion $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $\lfloor x\rfloor := \max\{g \in \mathbb{Z} \mid g \leq x\}$; ferner sei die Zack-Funktion $\operatorname{zack} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\operatorname{zack}(x) := \big|\lfloor x + \frac{1}{2}\rfloor - x\big|$, wobei $|\cdot|$ den Absolutbetrag darstellt. Zeichnen Sie den Graphen der Zack-Funktion und verifizieren Sie die Aussagen a)-c).

a) $\forall\, x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]: \quad \lfloor x\rfloor = |x|$.

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}: \ \forall\, n \in \mathbb{N}: \quad \operatorname{zack}(x) = \operatorname{zack}(x+n)$.

c) zack ist stetig.

d) Untersuchen Sie das Stetigkeitsverhalten der Funktion

$$g : x \mapsto \begin{cases} \operatorname{zack}(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$$

Skizzieren Sie (so gut Sie können) den Graphen dieser Funktion in einer Umgebung der 0.

Aufgabe 2: Konsequenzen des Zwischenwertsatzes

Folgende Aussagen sind für eine beliebige, stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zu beweisen:

a) Unter der Annahme, daß f das Intervall $[a,b]$ in sich selbst abbildet, das heißt $f\big([a,b]\big) \subset [a,b]$, besitzt f mindestens einen *Fixpunkt* $\xi \in [a,b]$, für den gilt $f(\xi) = \xi$.

b) Es gelte $f(a) = f(b)$ und es sei $\ell := b - a$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, a + \frac{1}{2}\ell]$ mit $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2}\ell)$.

c) Sei n eine natürliche Zahl größer 1. Dann kann f nicht sämtliche Werte genau n-mal annehmen.

Aufgabe 3: b-adische Brüche (Literaturaufgabe)

Auch wenn sich Konstanz auf dem Territorium des ehemaligen Großherzogtums Baden befindet, das heute ein Teil des Landes Baden-Württemberg darstellt, haben b-adische Brüche nichts mit badischen Brüchen zu tun, falls letztere überhaupt existieren. Unter einem b-adischen Bruch versteht man eine Reihe der Gestalt

$$\pm \sum_{k=-n}^{\infty} a_k b^{-k}$$

Dabei ist die Basis b eine natürliche Zahl größer oder gleich 2; während für die Koeffizienten a_k gilt: $0 \leq a_k \leq b-1$. b-adische Brüche verallgemeinern die gebräuchliche Dezimalschreibweise. Insbesondere sind auch *dyadische* Brüche ($b = 2$) von Bedeutung. Die folgenden Fragen werden im Lehrtext der meisten Analysis Bücher diskutiert. Scheuen Sie sich nicht, diese zu benutzen, wenn Sie alleine nicht weiterkommen.

a) Zeigen Sie, daß jeder b-adische Bruch eine Cauchy-Folge darstellt, und somit gegen eine reelle Zahl konvergiert.

b) Ist b eine natürliche Zahl größer 2, so läßt sich jede reelle Zahl in einen b-adischen Bruch entwickeln, d.h. zu jeder reellen Zahl gibt es einen b-adischen Bruch, welcher gegen diese konvergiert.

<u>Unterhaltsames:</u> Die Paradoxa des Zenon

Im fünften Jahrhundert v. Chr. lebte zwischen 490 bis 430 in der griechischen Kolonie Elea (Unteritalien) ein Philosoph namens Zenon[1]. Er gehörte der Schule der Eleaten an, die von seinem Lehrer Parmenides begründet wurde. Dieser beschäftigte sich u.a. mit dem *Sein* und lehrte, daß das Sein nicht der Wahrnehmung sondern allein dem Denken zugänglich ist. Das Sein ist ungeboren und unvergänglich (also ewig), unveränderlich und unbeweglich. Diese Lehre, welche die Natur des Seins durch Einheit und Unbeweglichkeit statt durch Vielfalt und Bewegung charakterisiert, hat Zenon durch geschicktes (sophistisches) Argumentieren zu verteidigen versucht. In diesem Zusammenhang stehen seine bekannten Paradoxa[2], mit denen er die Realität von Bewegung in Frage stellt. Später hat man diese Paradoxa dahingehend gedeutet, daß sie die Probleme und Widersprüchlichkeiten vor Augen führen, welche die Begriffe des Unendlichen und des Kontinuierlichen in sich bergen. Da der Begriff des Grenzwerts in der Antike noch unbekannt war und man sich nicht vorstellen konnte, daß unendliches Hinzufügen keineswegs unendliches Wachstum impliziert, empfand man die Zenonschen Paradoxa als eine *Aporie* (wörtlich Ausweglosigkeit, übertragen Ratlosigkeit d.h. hier Unmöglichkeit eine gewisse Frage zu beantworten), die in den *horror infiniti* – die Angst und Unsicherheit vor dem Unendlichen – mündete. Erst mit der Untersuchung unendlicher Reihen im Zuge der Entwicklung der Infinitesimalrechnung, die im 19. Jahrhundert ihren klassischen Abschluß fand, ließen sich die jahrhundertelang bestehenden Aporien auflösen. Hier nun zwei der Paradoxa:

> **Das Durcheilen des Stadions:** Ein Läufer soll eine bestimmte Distanz zurücklegen. Zunächst muß er dazu die halbe Strecke durchlaufen, danach die Hälfte von der zweiten Hälfte , dann die Hälfte der Hälfte von der halben Strecke und so fort. Stets muß er noch ein kleines Stückchen zurücklegen bevor er zum Ziel gelangt und daher kann er es nicht erreichen.
>
> **Das Wettrennen zwischen Achilleus und der Schildkröte:** Achilleus, der tapferste griechische Krieger im Trojanischen Krieg, soll gegen eine Schildkröte zum Wettlauf antreten. Da man den Recken auch für den schnellsten Sprinter hält, gesteht man dem schwerfälligen Reptil einen Vorsprung zu. Der Startpfiff verhallt und Achilleus erreicht den Startpunkt seiner Gegnerin; unterdessen ist diese bereits etwas weiter gekrabbelt. So setzt der Heroe seinen Lauf fort und gelangt zu dem Punkt, an dem sich die Schildkröte befand, als er ihren Startpunkt passierte. Doch die gepanzerte Echse hat inzwischen schon wieder eine Strecke zurückgelegt. Abermals sprintet er ihr hinterher. Jedesmal wenn er ihren Ausgangspunkt erreicht, ist das Tier eine weitere Distanz vorgerückt. So geschieht es, daß der leichtfüßige Achilleus den plumpen Vierbeiner nicht einzuholen geschweige denn zu überholen vermag.

Nun zu Ihren Aufgaben:

a) Auf welcher (irrigen) Vorstellung beruhen die beiden obigen Paradoxa des Zenon?

b) Lösen Sie die scheinbare Aporie auf. Legen Sie ausführlich (anhand von Rechnungen) dar, warum die beiden Argumentationen nicht im Widerspruch zu unserer Beobachtung und Erfahrung stehen bzw. wie diese damit in Einklang zu bringen sind.

c) Diskutieren Sie möglichst mit Nicht-Mathematikern (zum Beispiel im Familienkreis) die beiden Paradoxa. Versuchen Sie den Lösungsansatz Ihrer Gesprächspartner zu verstehen bzw. Ihren eigenen verständlich zu machen. Schildern Sie kurz Ihre Erlebnisse.

Schlußbemerkung: Wenden wir das Paradoxon von der Schildkröte und Achilleus auf den Helden und den Pfeil an, der ihn an der Ferse tödlich verwundete, so hätte der Pfeil den davoneilenden[3] Achilleus gar nicht erreichen können und somit wäre Achilleus nicht gefallen. Fast möchte man in diesem Kontext wünschen, Zenon hätte mit seinen Paradoxa recht. Denn in logischer Konsequenz würde es dann keinen Sinn mehr machen, auf Fliehende zu schießen, denn das Geschoß, egal ob Pfeil oder Gewehrkugel, könnte sein Opfer niemals einholen bzw. erreichen. Dadurch wäre aber die Durchführung von Kriegen erheblich erschwert. In welchem Frieden könnten wir leben! Damit schlagen wir die Brücke zum bevorstehenden Weihnachtsfest, das hierzulande unter anderem der menschlichen Friedenssehnsucht und Friedenshoffnung Ausdruck verleiht.

**Wir wüschen Ihnen frohe Feiertage,
einen geruhsamen Jahreswechsel und
eine stetig wachsende Begeisterung
für Ihr Studienfach Mathematik.**

P.S.: In unserer Zeit des materiellen Konsums sind die wertvollsten Geschenke doch oft ideeller Natur. Die Objekte, welche die Mathematik untersucht, sind ebenfalls im Reiche der Ideen beheimatet. Die vielfältigen Beziehungen und Ordnungen, welche dieses Reich durchdringen, können uns in Erstaunen versetzen und unsere Bewunderung auslösen, so daß man sich deshalb auch daran erfreuen kann.
Versäumen Sie es daher nicht, sich die Weihnachtsaufgaben vom Christkind herunterzuladen, die Ihnen einige interessante Details aus dem riesigen Beziehungsgeflecht der Algorithmen und Zahlen näherbringen. Übrigens hat das Chirstkind darauf bestanden, daß Sie die Aufgaben nicht wie sonst üblich unter Zwang und Druck bearbeiten müssen. Alle Weihnachtsaufgaben sind rein freiwillig. Vielleicht fühlen Sie sich von der ein oder anderen Behauptung herausgefordert. Dann dürfen Sie natürlich Ihrer Neugier freien Lauf lassen und versuchen, die Aufgabe zu knacken.

---

[1] Nicht zu verwechseln mit Zenon aus Kition, dem Begründer der *Stoa* (daher stoisch), die sich zur berühmtesten philosophischen Schule (Strömung) Athens während des Hellenismus entwickelte.

[2] Ein Paradoxon ist ein Tatbestand bzw. eine Aussage, welche dem Geglaubten und Erwarteten zuwiderläuft. In der Logik versteht darunter einen Satz, welcher zugleich wahr und falsch erscheint.

[3] In einer der jüngsten und aufsehenerregenden Hollywoodverfilmungen des Trojanischen Krieges, die leider in vielen Details von dem Original, der homerischen Ilias, abweicht, flieht Achilleus nicht vor dem Pfeil des Paris. Wie sich Achilleus auch immer verhalten haben mag, akzeptieren wir das erste Paradoxon, so hätte der Pfeil dem Achilleus ebenfalls nichts anhaben können. Jeder Schuß und jeder Hieb gelänge dann einfach nicht zu seiner grausamen Vollendung.