Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 16. Jan., WS 2005/06
Abgabe: 23. Jan. bis 10 Uhr

Analysis I

11. Übungsblatt

Aufgabe 1: Hölder-stetige Funktionen mit Index $\alpha > 1$

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei global Hölder-stetig zum Index $\alpha > 1$, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $x, y \in [a, b]$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|^{\alpha} \ .$$

Zeigen Sie, daß f konstant sein muß. Somit enthält die Menge aller Hölder-stetigen Funktionen zum Index $\alpha > 1$ nur die konstanten Funktionen. **Tip:** Stellen Sie $f(x) - f(y)$ als Teleskopsumme dar.

Aufgabe 2: Zur punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz

a) Geben Sie eine Folge stetiger Funktionen an, welche punktweise aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergieren.

b) Es sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$ auf dem *kompakten* Intervall I. Ferner genügen die Funktionen der Monotoniebedingung

$$f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \qquad \text{für alle } x \in I \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

und konvergieren punktweise gegen 0, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in I$. Beweisen Sie, daß die Funktionenfolge *gleichmäßig* auf I gegen die Nullfunktion konvergiert.

c) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, daß die Bedingung der Kompaktheit an das Intervall I unverzichtbar ist.

d) Versuchen Sie den Sachverhalt in Teil b) zu verallgemeinern.

Aufgabe 3: Berechnung von Konvergenzradien

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$a) \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n \qquad b) \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \tfrac{1}{2} + ... + \tfrac{1}{n}\right) x^n \qquad c) \ \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^{n^2}$$

Aufgabe 4: Die Additionstheoreme der Winkelfunktionen

Die Winkelfunktionen sind Ihnen sicherlich noch aus der Schule (10. Klasse) in Erinnerung (siehe Teil a). In der Vorlesung wurden die beiden wichtigsten Winkelfunktionen, der Sinus und Kosinus, mittels der folgenden Potenzreihen (Konvergenz?) definiert.

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Die Additionstheoreme (siehe unten) bieten eine gute Möglichkeit das Multiplizieren von Potenzreihen (Cauchy-Produkt) zu üben (Teil d). Betrachtet man die Winkelfunktionen aus einem anderen Blickwinkel, so lassen sich die Additionstheoreme, die auch für sich genommen wichtig sind, mit weniger Aufwand herleiten.

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \qquad \cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

Da der Zusammenhang zwischen der geometrischen Bedeutung der Winkelfunktionen und ihrer Definition über Potenzreihen keineswegs offensichtlich ist, überlegen Sie sich bitte ebenfalls (Pflichtaufgabe), wie sich dieser Zusammenhang herstellen ließe. Beachten Sie, daß Sie bei dieser Vorüberlegung nichts beweisen sollen; es geht lediglich darum, daß Sie die Aussagen präzise formulieren, die zu beweisen wären, um sich selbst oder eine dritte Person von einem Zusammenhang zu überzeugen.

a) (insbesondere für Lehrämtler) Rekapitulieren Sie die geometrische Definition der Winkelfunktionen Sinus und Kosinus am Einheitskreis und beweisen Sie mindestens eines der oben angegebenen Additionstheoreme anhand dieser Definition für $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ und $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

b) Aus der Schule oder der linearen Algebra ist Ihnen bekannt, daß Drehungen um den Ursprung spezielle lineare Abbildungen darstellen. Geben Sie die Drehmatrix $R(\alpha)$ für eine Drehung in der Ebene bezüglich des Ursprungs um den Winkel α an. Folgern Sie die Additionstheoreme aus den Identitäten $R(\alpha + \beta) = R(\alpha)R(\beta)$ und $R(\alpha - \beta) = R(\alpha)R(-\beta)$.

   Anmerkung: Wir nehmen diese Identitäten hier als gegeben, weil sie ganz und gar unserer Anschauung entsprechen; man kann aber auch einen umgekehrten Standpunkt einnehmen und die Additionstheoreme dazu benutzen, um die obigen Verkettungseigenschaften von Rotationsmatrizen herzuleiten.

c) (freiwillig) Da sich mit komplexen Zahlen ebenso wie mit rellen Zahlen rechnen läßt (zumindest was die arithmetischen Operationen anbetrifft), besteht abgesehen von der Klärung der Konvergenzfrage kein Hindernis, komplexe Zahlen in Potenzreihen einzusetzen und somit z.B. die Exponentialfunktion auf die komplexe Zahlenebene fortzusetzen. Es bezeichne i die imaginäre Einheit. Zeigen Sie zunächst für $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = \tfrac{1}{2}\big(e^{ix} + e^{-ix}\big) \qquad \sin(x) = \tfrac{1}{2i}\big(e^{ix} - e^{-ix}\big)$$

   Leiten Sie aus dem Additionstheorem der Exponentialfunktion die Additionstheoreme der Winkelfunktionen her.

d) Beweisen Sie mindestens ein Additionstheorem unter Verwendung der Potenzreihen mit dem Cauchy-Produkt.

Aufgabe 5: Poissonverteilung und Bellsche Zahlen

Einige von Ihnen haben den Wunsch nach Aufgaben geäußert, die einen (Anwendungs-)Bezug zu Ihren vielfältigen Nebenfächern erkennen lassen. Gerne kommen wir dieser Bitte nach. Sobald die Differential- und Integralrechnung zur Verfügung stehen, werden sich sowieso etliche Anwendungsaufgaben fast von selbst ergeben, denn Mathematik ist nicht *l'art pour l'art*.
Dies setzt natürlich auch von Ihrer Seite eine gewisse Offenheit voraus, sich für Anwendungen (z.B. aus der Physik) zu interessieren. Außerdem sind Vorschläge willkommen, da es für uns nur schwer möglich ist, ihren Bedarf einzuschätzen. Wenn also in ihren Nebenfächern Themen angesprochen werden, die ihrer Meinung nach einer mathematischen Ergänzung, Präzisierung etc. bedürfen, welche im Rahmen der Analysis-Vorlesung bzw. Übung stattfinden könnte, zögern Sie nicht, uns anzusprechen.

Die folgende Aufgabe wendet sich insbesondere an alle, die in ihren Nebenfächern mit Stochastik in Berührung kommen (Finanzökonomen). Die Anwendung ist zwar eher inner-mathematischer Natur, aber beim Üben des Umgangs mit Potenzreihen (insbesondere Einsetzen von Potenzreihen) ist dies nicht allzu verwunderlich.

Betrachten Sie eine $\mathbb{N}_0$-wertige Funktion (Zufallsvariable) $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ auf einer nicht näher spezifizierten Menge Ω (Stichproben- oder Ereignisraum). Als Zufallsvariable nimmt diese Funktion den Wert $k \in \mathbb{N}$ mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit (engl. probability) $p_k \equiv P(X = k)$ an. Die Zufallsvariable heißt *Poisson-verteilt*, falls gilt $p_k = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}$. Dabei ist $\mu > 0$ ein Parameter, der sich als Mittelwert $E(X)$ herausstellt. Allgemein bezeichnet $E(X^n) := \sum_{k\geq 0} p_k k^n, n \in \mathbb{N}_0$ das n'te Moment (falls die Summe existiert); insbesondere erhält man für $n = 1$ den Mittelwert (Erwartungswert). Die Kenntnis der Momente ist im wesentlichen gleichbedeutend mit der Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung d.h. der Zahlen p_k für $k \in \mathbb{N}$ und spielt deshalb beim mathematischen Studium solcher Verteilungen eine nicht unwichtige Rolle. Insbesondere definiert man die *momenterzeugende Funktion* $M_X(t) := E(e^{tX}) = \sum_{k\geq 0} p_k e^{kt}$.

Mehr Hintergrundinformation finden Sie auf den Seiten der Internet-Enzyklopädie *Wikipedia*, z.B.: `http://de.wikipedia.org/wiki/Poissonverteilung`. Dort erfahren Sie auch anhand von Beispielen, wie man die Poisson-Verteilung in der Praxis benutzen kann. Das Schmökern einschlägiger Wikipedia-Seiten hat den konkreten Anstoß zur vorliegenden Aufgabe gegeben. Achtung, angenehm schwammige Fragestellungen ihrerseits führen unsererseits ggf. zu Nachforschungen und weiteren Folgefragen (hier zum Thema Kombinatorik).

Ziel der Aufgabe ist es, sämtliche Momente der Poisson-Verteilung (bzw. einer Poisson-verteilten Zufallsvariable) zu berechnen. Dabei kommen erstaunlicherweise die *Bellschen Zahlen* ins Spiel. Die n-te Bellsche Zahl, welche im Falle $\mu = 1$ dem n-ten Moment entspricht, ist definiert als die Anzahl aller Zerlegungen einer n-elementigen Menge, wobei $B_0 := 1$ gesetzt wird. Die Elemente der Menge werden dabei als unterscheidbar betrachtet. Eng verwandt mit diesen Zahlen sind auch die *Stirlingschen-Zahlen zweiter Art.* $S(n, k)$ gibt an, auf wieviele Weisen man eine n-elementige Menge in k Teilmengen zerlegen kann. Die Stirlingschen Zahlen genügen für $n, k \in \mathbb{N}$ der Rekursion

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k) \qquad \text{mit den Anfangsbedingungen } S(0, 0) = 1, \ S(n, 0) = S(0, k) = 0.$$

und besitzen die explizite Darstellung

$$S(n, k) = \frac{1}{k!}\sum_{\ell=1}^{k}\binom{k}{\ell}(-1)^{k-\ell}\ell^n$$

Trivialerweise gilt $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)$.

t) Zeigen Sie: $E(X^0) = 1$ (d.h. die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist 1) und $E(X) = \mu$. Ferner ist durch eine formale Rechnung $\frac{d^n}{dt^n} M_X(t)|_{t=0} = M_X^{(n)}(0) = E(X^n)$ nachzuweisen.

u) Leiten Sie eine explizite Darstellung der momenterzeugenden Funktion zur Poisson-Verteilung her.

v) Begründen Sie kombinatorisch die Rekursionsformel $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}B_{n+1-k}$.

w) Begründen Sie ebenfalls die Rekursionsformel der Stirlingschen Zahlen zweiter Art; verifizieren Sie sodann deren explizite Darstellung.

x) Beweisen Sie $\exp(e^x - 1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$.

y) Leiten Sie die explizite Darstellung der Bellschen Zahlen her: $B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$.

z) Gewinnen Sie abschließend die Identität $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^{n+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^n}{k!}$.

Manchmal darf sogar eine 1 vom Exponenten in die Basis verrutschen, ohne daß sich dabei ein Fehler ergibt!