Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 23. Jan., WS 2005/06
Abgabe: 30. Jan. bis 10 Uhr

Analysis I

12. Übungsblatt

Aufgabe 1: Anschauliches über stetige Funktionen

Die beiden folgenden Aussagen über stetige Funktionen sind zwar anschaulich sehr einleuchtend, bedürfen aber dennoch einer mathematisch sauberen Rechtfertigung. Beim Beweisen dürfen Sie sich daher durch die Anschauung leiten lassen, achten Sie aber darauf, daß Sie keine Argumente benutzen, die Ihnen zwar intuitiv richtig erscheinen, die aber letztlich nur durch ihre Vorstellungskraft begründet sind.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig*. Dann ist f genau dann *injektiv*, wenn f *streng monoton* ist. Unter Stetigkeit auf einem Intervall sind also Injektivität und strenge Monotonie zueinander äquivalent.

b) (freiwillig) Die Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei *monoton* und bilde Intervalle auf Intervalle ab. Dann ist f stetig. **Anleitung:** Zeigen Sie, daß *monotone* Funktionen nur *Sprungstellen* als Unstetigkeitsstellen zulassen. Rufen Sie sich dazu das Konvergenzprinzip 'monoton & beschränkt $\Rightarrow$ konvergent' in Erinnerung. Unter der Annahme, f sei nicht stetig, können Sie den Widerspruch zu der zweiten Eigenschaft von f konstruieren.

Aufgabe 2: Kettenregel als Quelle weiterer Differentiationsregeln

a) Zeigen Sie, daß sich die Produktregel aus der Kettenregel ableiten läßt. **Tip:** Denken Sie daran, daß ein Produkt mittels der 1. und 2. binomische Formel durch Quadrate dargestellt werden kann.

b) Leiten Sie ebenfalls mit der Kettenregel die Reziprokregel her, um $1/f$ abzuleiten. Berechnen Sie dazu zunächst mit dem Differentialquotienten die Ableitung der Funktion $x \mapsto 1/x$.

c) Beweisen Sie die Quotientenregel, indem Sie die Produktregel mit der Reziprokregel kombinieren.

d) Berechnen Sie unter der Annahme, daß die differenzierbare Funktion eine differenzierbare Umkehrfunktion besitzt, deren Ableitung.

Aufgabe 3: Differenzieren Üben

Geben Sie die Definitionsgebiete der folgenden Funktionen an und berechnen Sie ihre Ableitung.

a) $f(x) = \dfrac{e^{\cos(x^2)}}{\sqrt{1-x^4}}$ b) $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ c) $h(x) = \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0, n \in \mathbb{N} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Welche Grenzwerte müssen bekannt sein, um die Ableitung der Winkelfunktionen mit dem Differentialquotienten unter Ausnutzung der Additionstheoreme zu berechnen?

Aufgabe 4: Anwendungen des Mittelwertsatzes

a) Es sei $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann bedingt $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$ für jedes feste $L > 0$: $\lim\limits_{x\to\infty} \big[f(x+L) - f(x)\big] = 0$.

b) Wir betrachten das folgende Randwertproblem, bei dem eine Funktion $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ gesucht ist, welche stetig auf $[1, 3]$ sowie differenzierbar auf $(1, 3)$ ist und die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$f'(x) = [f(x)]^2 + 4 \quad \text{für } x \in (1,3), \qquad f(1) = 1, \qquad f(3) = 6.$$

Gibt es eine Lösung?

Aufgabe 5: Äquivalente Definition der Differenzierbarkeit

Zeigen Sie, daß eine Funktion f in x_0 genau dann differenzierbar ist, wenn gilt:

$$\exists L \in \mathbb{R} : \ \forall \epsilon > 0 : \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in D(f) \setminus \{x_0\}, \ |x - x_0| < \delta : \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \right| < \epsilon.$$

Aufgabe 6: Anwendung: Ableitungen der Winkelfunktionen und Schwingungsgleichung

Die folgende Aufgabe ist eine Anwendungsaufgabe mit physikalischem Hintergrund. Denjenigen, denen das notwendige Hintergrundwissen fehlt, sei hier eine kurze Einführung gegeben.
Um die Bewegung eines (Feder-)Pendels zu berechnen geht man von der Newtonschen Grundgleichung der Mechanik *Masse*x*Beschleunigung = Kraft* aus. Bezeichnen wir mit $x = x(t)$ die Position des Pendelkörpers zum Zeitpunkt t, so ist seine momentane Beschleunigung durch die zweite Ableitung $x''(t)$ gegeben. Die Kraft, welche die Feder auf den Pendelkörper der Masse m ausübt, ist proportional zu seiner Auslenkung bezüglich der Gleichgewichtslage. Da es sich um eine Rückstellkraft handelt, die der Bewegung entgegenwirkt, ist sie mit einem Minuszeichen zu versehen. (Hier macht sich der vektorielle Charakter der Kraft bemerkbar.) Somit erhalten wir für die Kraft $-kx(t)$, wobei der Proportionalitätsfaktor k die Federhärte bezeichnet. Insgesamt werden wir nun auf die folgende Bewegungsgleichung

$$mx''(t) = -kx(t)$$

geführt. Intuitiv ist klar, daß man den Aufenthaltsort des Pendelkörpers zum Zeitpunkt t nur dann berechnen kann, wenn seine Anfangsposition $x(0)$ und seine Anfangsgeschwindigkeit $x'(0)$ bekannt sind. Die obige Gleichung beschreibt im Physikerjargon die Bewegung des eindimensionalen, freien und ungedämpften *harmonischen Oszillators*.
Setzt man der Einfachheit halber die Konstanten m, k auf 1, so gelangt man zu der Gleichung, die Sie anhand der Aufgabe diskutieren sollen.

a) Weisen Sie anhand der Reihendarstellung des Sinus und Kosinus die folgenden Beziehungen nach:

$$\sin'(t) = \cos(t) \qquad \text{und} \qquad \cos'(t) = -\sin(t).$$

b) Die Funktionen $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar. Ferner erfülle das Paar die Beziehungen

$$x'(t) = y(t) \qquad \text{und} \qquad y'(t) = -x(t).$$

Folgern Sie daraus

- x, y sind beliebig oft differenzierbar.
- x, y erfüllen jeweils die Differentialgleichung $z'' + z = 0$.
- Es gilt $x^2(t) + y^2(t) = \text{const.}$. **Tip:** Leiten Sie die Gleichung ab.
- x, y sind beschränkt.

c) Zeigen Sie, daß Sinus und Kosinus einen beschränkten Wertebereich besitzen, genauer:

$$-1 \leq \sin(t) \leq 1 \qquad \text{und} \qquad -1 \leq \cos(t) \leq 1.$$

Wir haben nun gesehen, daß Sinus und Kosinus zwei spezielle Lösungen der Schwingungsgleichung sind. Auf dem nächsten Übungsblatt konstruieren wir Lösungen der Schwingungsgleichung zu allgemeinen Anfangsbedingungen.