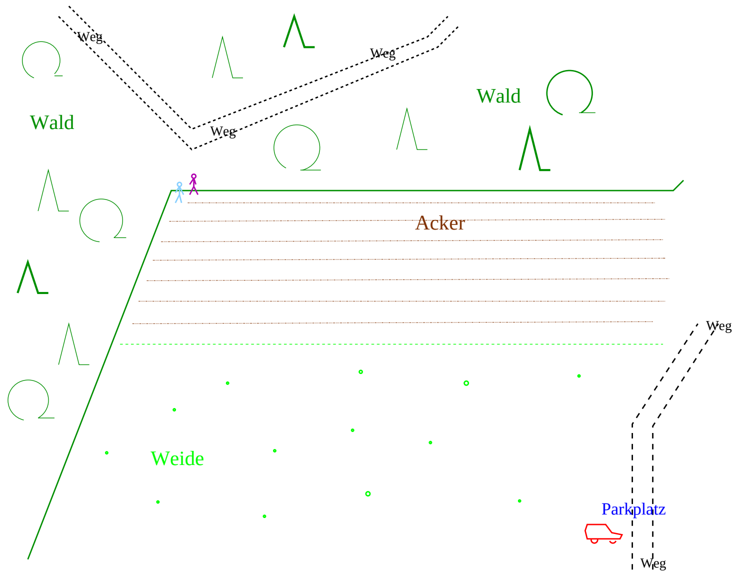
Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 13. Feb., WS 2005/06
Besprechung im Sommersemester

Analysis I

15. Übungsblatt

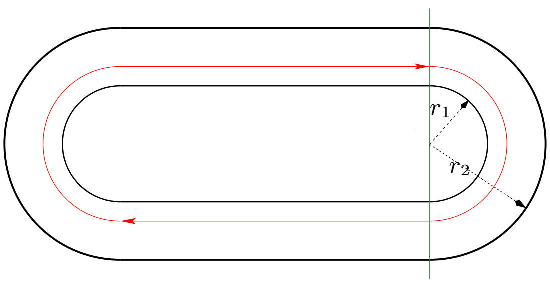
Aufgabe 1: Querfeldein



Zwei Freunde befinden sich auf einem Spaziergang durch ein Waldgebiet. Ins Gespräch vertieft übersehen sie den Wanderwegweiser und schlagen einen falschen Weg ein. Nach einer Weile werden Sie ihres Irrtums gewahr und müssen feststellen, sogar die Orientierung verloren zu haben. Umgeben von lauter Bäumen fehlt jegliche Bezugsmarke, um ihren Standpunkt auf der Wanderkarte lokalisieren zu können. So beschließen sie, dem Weg zunächst weiter zu folgen. Als sie schätzungsweise zwei Kilometer gelaufen sind, bemerken sie, daß sich der Wald rechter Hand zu lichten scheint. Sie verlassen den Weg und erreichen tatsächlich den Waldsaum, nachdem sie sich knapp 100 Meter durchs Unterholz geschlagen haben. Nun stehen sie am Rand eines großen Ackers hinter dem sich – durch die sanfte Abschüssigkeit des Geländes gut zu überblicken – eine nicht weniger breite Weide erstreckt. In der Ferne glauben sie ihr Auto zu erkennen, welches sie seitlich einer Wiese auf einem kleinen Wanderparkplatz abgestellt hatten. Ein Blick auf die Karte bestätigt die Vermutung, daß sie nur wenige hundert Meter von ihrem Ausgangspunkt entfernt sein müssen. Da die Dämmerung bereits eingesetzt hat, verspüren die beiden keine Lust in den Wald zurückzukehren sondern ziehen es stattdessen vor, ohne Umwege, querfeldein zum Auto zu laufen. Aufgrund des Tauwetters ist der Ackerboden aber stark aufgeweicht. Um nicht verdreckt wie zwei Wildschweine am Auto anzukommen, sind sie gezwungen, sich sehr behutsam und langsam über die Furchen zu bewegen. Dadurch, so schätzen sie, ist ihre Geschwindigkeit auf dem Acker um mindestens Zweidrittel ihres Standardschrittes reduziert, welchen sie auf der Weide dank des niedrigen aber festen Grases ohne Probleme halten können. Welche Richtung müssen die beiden Freunde zunächst einschlagen, damit sie möglichst schnell das Auto erreichen?

Abstrahieren Sie das Problem und führen Sie ihre Rechnung allgemein durch, bevor sie konkrete Zahlenwerte einsetzen, welche dem obigen Kartenausschnitt (durch Messung) entnommen werden können. Sehen sie eine Parallele zur Physik?

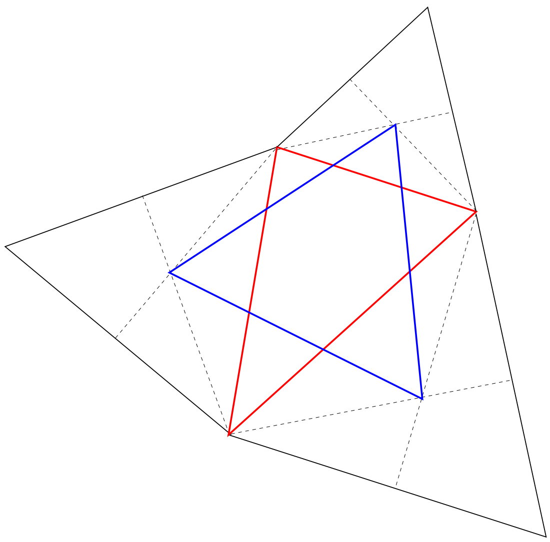
Aufgabe 2: Kurven Durchfahren (Modellierungsaufgabe)



Bei einem Einzelfahrtwettbewerb sollen Autofahrer die Kurve der nebenstehend abgebildeten Rennbahn möglichst schnell durchfahren. Dabei ist es ihnen untersagt, die Kurve zu schnibbeln, d.h. die Autofahrer sollen in der Kurve ihre Spur halten bzw. die Kurve mit konstantem Radius durchfahren. Der jeweilige Autofahrer beschleunigt seinen Wagen auf dem oberen geraden Teilstück der Rennbahn. Beim Erreichen der grünen Linie beginnt die Zeit zu laufen, bis der Autofahrer die grüne Linie zum zweiten Mal überquert, bevor er auf das untere gerade Teilstück gelangt. Berechnen Sie den optimalen Kurvenradius $r \in [r_1, r_2]$ sowie die dazugehörige Geschwindigkeit. Beachten Sie, daß hierbei zwei antagonistische Effekte auftreten: Je kleiner der Radius desto kürzer zwar die zurückzulegende Strecke desto geringer aber auch die mögliche Maximalgeschwindigkeit.
Ändert sich das Ergebnis, wenn nicht nur eine Kurve sondern mehrere Runden durchfahren werden sollen?

Beachten Sie, daß das Fahrzeug bei überhöhter Geschwindigkeit seitlich ausbricht und 'aus der Kurve fliegt', wodurch der Fahrer disqualifiziert wird. Nehmen Sie an, daß die Fahrbahn in der Kurve keine Überhöhung aufweist, so daß die notwendige Zentripetalkraft allein durch Reibungskräfte zustande kommt. Dabei soll ferner angenommen werden, daß die maximale Reibungskraft, welche im wesentlichen vom Fahrzeuggewicht, der Bereifung und dem Staßenbelag abhängt, eine Fahrzeug-spezifische Konstante darstellt. Leiten Sie zunächst mit der Newtonschen Grundgleichung der Mechanik eine Formel für den Betrag der Zentripetalkraft als Funktion des Kurvenradius r, des Geschwindigkeitsbetrages v und der Fahrzeugmasse her (Antwort: $F_z = mv^2/r$).

Aufgabe 3: Zur 'tollen' Jahreszeit – die unbekannten Seiten des Napoleon Bonaparte



Nanu, was ist denn das? Das sieht ja wieder ganz nach einer Geometrieaufgabe aus! Was hat die bloß auf dem Analysiszettel verloren? Eigentlich nichts! Aber bald ist Fasnacht – dann steht die Welt Kopf und wer könnte es uns da nicht verdenken, wenn wir einmal eine andersartige Aufgabe unter's Volk mischen – erst recht wenn sich der Aufgabensteller dabei selbst amüsiert hat.

Was denken Sie? Eigenartiger Humor!? Möglichweise. Aber nun lassen Sie nicht gleich die Fleppen hängen. Riskieren Sie doch wenigstens einmal einen scharfen Blick auf die Zeichnung. Was ist das Besondere an dem blauen Dreieck? Falls Sie es nicht sofort sehen, messen Sie die Seitenlängen nach. Seien sie jedoch nicht zu genau, denn das Bildchen ist zwar mit dem Computer aber schließlich doch nur von Hand erstellt.

Na klar, jetzt sehen Sie es auch: Das blaue Dreieck ist gleichseitig. Und wie wurde es konstruiert? Nochmal messen?

Offenbar erhält man das blaue Dreieck, indem man über den Seiten des roten Dreiecks ebenfalls gleichseitige Dreiecke errichtet und deren Mittelpunkte (Schwerpunkte) dann miteinander verbindet. Dabei wurde das rote Dreieck völlig beliebig ausgewählt. Famos, oder? Sie glauben es nicht, dann nehmen Sie Zirkel und Lineal zur Hand und probieren es selbst mit einem 'anderen' roten Dreieck aus – Sie werden sehen, das blaue Dreieck ist immer gleichseitig, egal wie Sie es anstellen.

Verspüren Sie jetzt nicht den Drang, sich ein für allemal von der Richtigkeit dieser Beobachtung zu überzeugen? Zugegeben, die Nützlichkeit der Beobachtung mag dahingestellt bleiben, aber wenn Sie sie beweisen können, dann stoßen Sie sich die Tür zu einer (zwar winzigen aber doch) ewigen Wahrheit auf. Bevor wir nun ins Philosophische abdriften und Sie zu gähnen anfangen, verraten wir Ihnen, daß wir die Aufgabe natürlich nicht ohne einen didaktischen Hintergedanken ausgewählt haben. Es sollen nämlich einmal Ihre Kenntnisse aus der Linearen Algebra auf die Probe gestellt werden, denn der Beweis der Beobachtung kann u.a. rein rechnerisch geführt werden. Sollten Sie die Aufgabe lösen können, verfügen Sie sicherlich über das nötige Rüstzeug aus der linearen Algebra, welches in der Analysis II benötigt wird.

Achtung: Um einer eventuellen, unbegründeten 'Panik' vorzubeugen: Hier wird nur eine Implikation aber keine Äquivalenz angenommen. Sollten Sie mit der Aufgabe nicht zurecht kommen, muß das nicht heißen, daß Sie in der Analysis II aufgrund ihrer LA I Kenntnisse scheitern.

Ach ja, nun hätten wir beinahe doch ganz vergessen zu erwähnen, was die Aufgabe mit dem größten französischen General, Konsul und Kaiser zu tun hat, der übrigens 1806, also vor genau 200 Jahren, die Auflösung des (ersten) Deutschen Reiches und die Gründung des Rheinbundes bewirkte. Angeblich soll die Beobachtung auf Napoleon zurückgehen. Sicher ist, daß sich Napoleon für Mathematik wie i.a. für die Wissenschaften interessierte und z.B. auf seinem Ägyptenfeldzug eine wissenschaftliche Expedition mitnahm.
Zum Schluß sei noch ein *Palindrom*[a] zum Besten gegeben, das Napoleons Karriere sehr treffend zusammenfaßt:

ABLE WAS I ERE I SAW ELBA.

Verstehen Sie den Sinn? Kennen Sie andere Palindrome?

[a] $\pi\acute{\alpha}\lambda\iota\nu$ = noch einmal, wieder, zurück. $\delta\rho\acute{o}\mu o\varsigma$ = Lauf, vergleiche die vor allem im Französischen gebräuchlichen Worte *Hippodrom* (Pferderennbahn), *Velodrom* (Radrennbahn), *Aerodrom*(Flugplatz). Ein *Palindrom* ist also eine Folge von Worten, die sich – den gleichen Sinn ergebend – vorwärts (von links nach rechts) wie rückwärts (von rechts nach links) lesen läßt. Synonym zu Palindrom wird auch die Bezeichnung *Anagramm* verwendet.