Axiome der reellen Zahlen

R0: Es existiert eine Menge $\mathbb{R}$, deren Elemente reelle Zahlen heißen und die folgenden Eigenschaften besitzen:

Körperaxiome der Addition:

A0: Zwei beliebigen Elementen x und y aus $\mathbb{R}$ wird eindeutig ein drittes Element aus $\mathbb{R}$ zugeordnet, das wir mit $x + y$ bezeichnen. Es gilt

A1: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$ (Assoziativität)

A2: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$ (Kommutativität)

Es existiert ein *neutrales Element* $n_+ \in \mathbb{R}$ der Addition für das gilt

A3: $\forall x \in \mathbb{R} : x + n_+ = x$

und es existieren *inverse Elemente*, genauer

A4: $\forall x \in \mathbb{R} : \exists(-x) \in \mathbb{R} : (-x) + x = n_+$

Körperaxiome der Multiplikation:

Mit $\mathbb{R}^\times$ bezeichnen wir die Elemente von $\mathbb{R}$, die nicht neutrale Elemente der Addition sind.

M0: Zwei beliebigen Elementen $x, y \in \mathbb{R}$ wird eindeutig ein drittes Element aus $\mathbb{R}$ zugeordnet, das wir mit xy bzw. $x \cdot y$ bezeichnen. Es gilt

M1: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (xy)z = x(yz)$

M2: $\forall x, y \in \mathbb{R} : xy = yx$

Es existiert ein neutrales Element $n_\bullet \in \mathbb{R}^\times$ für das gilt

M3: $\forall x \in \mathbb{R} : xn_\bullet = x$

M4: $\forall x \in \mathbb{R}^\times : \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x^{-1}x = n_\bullet$

Körperaxiom zur Distributivität:

D: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$

Anordnungsaxiome:

O1: Für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$

O2: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge y \leq x \Longrightarrow x = y$

O3: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ (Transitivität)

O4: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \Longrightarrow z + x \leq z + y$

O5: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge 0 \leq z \Longrightarrow zx \leq zy$

Vollständigkeitsaxiom:

V: Sei $A \neq \emptyset$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $S = \{s \in \mathbb{R} | \forall x \in A : x \leq s\}$ die zugeordnete Menge der oberen Schranken. Ist $S \neq \emptyset$ (d.h. A nach oben beschränkt) dann enthält S ein kleinstes Element, d.h. $\exists s_{min} \in S : \forall s \in S : s_{min} \leq s$